Об одном методе построения решений в динамических задачах для многослойного пороупругого полупространства

Е.А.Волкова, А.А. Ляпин

При анализе динамического отклика геологической структуры на тарированное воздействие или сейсмические нагрузки одной из основных задач является создание адекватных математических моделей такой структуры. При этом на практике встречается достаточно большое разнообразие типов строения как оползневых поверхностных массивов, так и подстилающих сред. В последнем случае наиболее распространенной моделью является модель слоистого полупространства [1-3]. При этом наличие обводненности в целом или части слоев существенно сказывается на формировании спектрального состава отклика среды, регистрируемого на его поверхности или в оползневой зоне.

Рассматривается в декартовой системе координат Oxy N-слойная пороупругая полуплоскость, свойства каждой составляющей которой определяются [4]: ρ_1, ρ_2 - соответственно плотностями твердой и жидкой фаз; ρ_{12} - коэффициентом массовой связи; P, Q, μ, λ - упругими постоянными скелета; m- объемной пористостью; k - коэффициентом проницаемости; b-динамической вязкостью.

Движение среды описывается амплитудными функциями смещения скелета (твердой фазы) - $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \{u_x(\mathbf{r}), u_y(\mathbf{r})\}$,

и жидкости в порах - $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \{v_x(\mathbf{r}), v_y(\mathbf{r})\}$,

удовлетворяющих уравнениям Био-Френкеля [5]:

$$\rho_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + b\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) = \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla\left((\lambda + \mu)\vartheta + Q\varepsilon\right)$$

$$\rho_{21} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + b\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) = \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla\left((\lambda + \mu)\vartheta + Q\varepsilon\right) \qquad (1)$$

На поверхности $x = -x_N$ задан вектор напряжений

$$\{\sigma_x, \tau_{xy}, S\}^T = \mathbf{T}, \tag{2}$$

здесь σ_x, τ_{xy} - напряжения в скелете, S - сила, действующая на жидкость в порах.

На границах раздела слоев могут быть заданы следующие условия сопряжения сред (открытые поры):

– непрерывности векторов перемещений, раздельно для твердой и жидкой фракций;

– непрерывности векторов напряжений $\{\sigma_x, \tau_{xy}, S\}^T$.

Отметим, что при отсутствии жидкости, в предположении, что $S \equiv 0, m = 0$, уравнения (1) переходят в уравнения Ламе для изотропных упругих сред.

При решении задачи для однородной полуплоскости с условиями на поверхности $x = 0$

$$\{\sigma_x, \tau_{xy}, S\}^T = \mathbf{X} \tag{3}$$

функции перемещений в скелете и жидкости можно представляются через волновые потенциалы [6]:

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times (\psi \mathbf{e}_z); \mathbf{v} = \nabla\varphi_1 + \nabla \times (\psi_1 \mathbf{e}_z) \quad ,$$

а решение краевой задачи отыскивается в пространстве преобразований Фурье [7]:

$$\bar{f}(\alpha) = F[f(y)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\exp(i\alpha y)dy, \quad f(y) = F^{-1}[\bar{f}(\alpha)] = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \bar{f}(\alpha)\exp(-i\alpha y)d\alpha. \tag{4}$$

Контур Γ при интегрировании в плоскости комплексного параметра α определяется принципом предельного поглощения [8]. Однако при ненулевой динамической вязкости жидкости в порах b данный контур может совпадать с действительной осью.

В итоге решение может быть сформулировано в виде следующих матричных соотношений:

$$\overline{\mathbf{u}}(x, \alpha) = \{\overline{u}_x, \overline{u}_y\}^T = \mathbf{U}(x, \alpha) \cdot \mathbf{C}(\alpha) \tag{5}$$

$$\bar{\mathbf{t}}(x,\alpha) = \{\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}, \bar{S}\}^T = \mathbf{B}(x,\alpha)\cdot\mathbf{C}(\alpha), \tag{6}$$

где $$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 \exp(-\sigma_1 x) - \sigma_2 \exp(-\sigma_2 x) & -i\alpha \exp(-\sigma_3 x) \\ -i\alpha \exp(-\sigma_1 x) - i\alpha \exp(-\sigma_2 x) & \sigma_3 \exp(-\sigma_3 x) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \varsigma_1^2 \exp(-\sigma_1 x) & \varsigma_2^2 \exp(-\sigma_2 x) & 2i\alpha\sigma_3 \exp(-\sigma_3 x) \\ -2q_{33} i\alpha\sigma_1 \exp(-\sigma_1 x) & -2q_{33} i\alpha\sigma_2 \exp(-\sigma_2 x) & -q_{33}\varsigma_3^2 \exp(-\sigma_3 x) \\ -\theta_1^2(q_{12} + m_1 q_{22}) & -\theta_2^2(q_{12} + m_2 q_{22}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varsigma_j^2 = \left[2u^2 q_{33} - \theta_j^2\left(q_{11} + m_j q_{12}\right)\right],\ j = 1,2, \quad \varsigma_3^2 = u^2 + \sigma_3^2, \quad \sigma_i = \sqrt{u^2 - \theta_i^2},\ i = 1,2,3$$

$$m_i = (\gamma_{12} - \xi_i q_{12})/(\xi_i q_{22} - \gamma_{22})$$

$$q_{11} = (\lambda + 2\mu)/H;\ q_{12} = Q/H;\ q_{22} = P/H$$

$$H = \lambda + 2\mu + 2Q + P;\ \theta_0^2 = \rho\omega^2 a^2/H;\ \rho = \rho_1(1-m) + \rho_2 m$$

$$\gamma_{12} = (\rho_{11} + ib/\omega)/\rho;\ \gamma_{12} = (\rho_{12} - ib/\omega)/\rho$$

$$\gamma_{22} = (\rho_{22} + ib/\omega)/\rho;\ \theta_i^2 = \xi_i^2\theta_0^2, \quad i = 1,2$$

$$\rho_{11} = (1-m)\rho_1 - \rho_{12}; \quad \rho_{22} = m\rho_2 - \rho_{12}; \quad \theta_3^2 = \rho_{11}\omega^2 a^2/\mu$$

Перемещения для точек жидкой фракции осуществляется заменой в формулах для $\bar{\mathbf{u}}\ (x,\alpha)$ функций $C_j(\alpha)$ на $C_j(\alpha)m_j, j = 1,2$ и $C_3(\alpha)$ на $C_3(\alpha)\gamma$.

Компоненты вектора $\mathbf{C}(u)$ определяются из граничного условия (3) в виде:

$$\mathbf{C}(\alpha) = \mathbf{B}^{-1}(0,\alpha)\cdot\overline{\mathbf{X}}(\alpha).$$

В итоге получим

$$\bar{\mathbf{u}}(x,\alpha) = \mathbf{U}(x,\alpha)\cdot\mathbf{B}^{-1}(0,\alpha)\cdot\overline{\mathbf{X}}(\alpha) = \mathbf{K}(x,\alpha)\cdot\overline{\mathbf{X}}(\alpha)$$

$$\bar{\mathbf{t}}(x,\alpha) = \mathbf{B}(x,\alpha)\cdot\mathbf{B}^{-1}(0,\alpha)\cdot\overline{\mathbf{X}}(\alpha) = \mathbf{L}(x,\alpha)\cdot\overline{\mathbf{X}}(\alpha).$$

При исследовании динамических задач для многослойной пороупругой среды требуется построение решений уравнений движения Био-Френкеля для слоя фиксированной толщины, а также выполнение условий сопряжения слоев между собой.

Рассмотрим слой с номером k, занимающий в локальной системе координат область $D_k = \{x \in (-h_k, 0), y \in (-\infty, +\infty)\}$.

На гранях слоя считаем заданными векторы обобщенных напряжений

$$\left\{\sigma_x, \tau_{xy}, S\right\}^T\Big|_{x=0} = \mathbf{R}^{(1)}(y), \qquad \left\{\sigma_x, \tau_{xy}, S\right\}^T\Big|_{x=-h_k} = \mathbf{R}^{(2)}(y). \tag{7}$$

Для данного слоя решение будем отыскивать в виде [9]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)},$$

соответствующем решениям уравнений (1) для двух полуплоскостей, пересечение которых определяет требуемый слой.

В этом случае функции с индексами (1,2) можно получить из соотношений (5,6) путем замен:

$$\bar{\mathbf{u}}^{(1)}(x,\alpha) = \mathbf{K}^{(1)}(x,\alpha)\cdot\overline{\mathbf{X}}^{(1)}(\alpha); \qquad K_{ij}^{(1)}(x,\alpha) = K_{ij}(x,\alpha)\cdot(-1)^{\delta_{ij}}\Big|_{x=-x}$$

$$\bar{\mathbf{t}}^{(1)}(x,\alpha) = \mathbf{L}^{(1)}(x,\alpha)\cdot\overline{\mathbf{X}}^{(1)}(\alpha); \qquad L_{ij}^{(1)}(x,\alpha) = L_{ij}(x,\alpha)\cdot(-1)^{\delta_{ij}+1}\Big|_{x=-x}$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{(2)}(x,\alpha) = \mathbf{K}^{(2)}(x,\alpha)\cdot\overline{\mathbf{X}}^{(2)}(\alpha); \qquad K_{ij}^{(2)}(x,\alpha) = K_{ij}(x,\alpha)\Big|_{x=x+h_k}$$

$$\bar{\mathbf{t}}^{(2)}(x,\alpha) = \mathbf{L}^{(2)}(x,\alpha)\cdot\overline{\mathbf{X}}^{(2)}(\alpha); \qquad L_{ij}^{(2)}(x,\alpha) = L_{ij}(x,\alpha)\Big|_{x=x+h_k}$$

$i = 1,2;\quad \mathrm{j} = 1,2,3;\quad \mathrm{k}$ - номер слоя.

Вектор-функции $\mathbf{X}^{(j)}$ в данном представлении являются неизвестными и подлежат определению из условий (7), записанных в преобразованном по Фурье виде. В результате придем к системе линейных алгебраических уравнений, определяющих для каждого фиксированного α значения трансформант Фурье $\overline{\mathbf{X}}^{(j)}(\alpha), \quad j = 1,2$.

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{X}}^{(1)}(\alpha) + \mathbf{L}^{(2)}(0,\alpha)\cdot\overline{\mathbf{X}}^{(2)}(\alpha) = \overline{\mathbf{R}}^{(1)}(\alpha), \\ \overline{\mathbf{X}}^{(2)}(\alpha) + \mathbf{L}^{(1)}(-h_k,\alpha)\cdot\overline{\mathbf{X}}^{(1)}(\alpha) = \overline{\mathbf{R}}^{(2)}(\alpha). \end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что элементы полученной системы (8) $\mathbf{L}^{(2)}(0,\alpha)$, $\mathbf{L}^{(1)}(-h_k,\alpha)$ экспоненциально убывают при $|\alpha| \to \infty$, что обеспечивает диагональное преобладание элементов и хорошую обусловленность матрицы системы [10].

После их определения восстановление напряженно-деформированного состояния среды осуществляется контурным интегрированием с использованием соотношений (4).

Литература:

1. Ляпин, А.А. Механико-математические модели в задачах активной сейсмологии [Текст]: Монография / Ляпин А.А., Селезнев М.Г., Собисевич Л.Е., Собисевич А.Л. – М.: ГНИЦ ПГК, 1999. 294 с.
2. Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F. Elastic waves in layered media. – New York etc.: Mc Graw-Hill Book Co., 1957. –380 p.
3. Кадомцев М.И., Ляпин А.А., Тимофеев С.И. К вопросам построения эффективных алгоритмов расчета системы «сооружение-грунт» [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №1. – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/719 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.
4. Николаевский, В.Н. Механика насыщенных пористых сред [Текст]: Монография / Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. - М.: Наука, 1970. -336 с.
5. Biot M.A. Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid. / J. Appl. Phys. –1952. –V.23, 2. –P.997-1005.
6. Поручиков, В.Б. Методы динамической теории упругости [Текст]: Монография / Поручиков В.Б. -М.: Наука, 1986. –328 с.
7. Уфлянд, Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости [Текст]: Монография / Я.С. Уфлянд –Л., Наука. 1967. – 403 с.
8. Ворович, И.И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей [Текст]: Монография / Ворович И.И., Бабешко В.А. – М.: Наука, 1989. –320 с.
9. Кадыров Р.Р., Ляпин А.А. Особенности возбуждения слоистых сред внутренними источниками колебаний [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №3. – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/981 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

10. Малышев, А.Н. Введение в вычислительную линейную алгебру [Текст]: Монография / Малышев А.Н. –Новосибирск: Наука, 1991. –229 с.