К вопросам построения интегральных операторов с осциллирующими коэффициентами в пространстве $L_2(B_n)$

А.Г. Данекянц

В настоящее время имеется немало работ, посвященных многомерным интегральным операторам с однородными степени (-n) ядрами (см., например, [1-4], [7-8]). Для таких операторов получены необходимые и достаточные условия нетеровости и обратимости, описаны банаховы алгебры, порожденные этими операторами, найдены критерии применимости проекционного метода, интегральные операторы с однородными ядрами и переменными коэффициентами ([2], [3]). В данной статье рассматриваются операторы с радикальными осциллирующими коэффициентами вида $|x|^{i\delta}$. Подчеркнем, что операторы с однородными ядрами и радикальными (по крайней мере в окрестности точки x=0) коэффициентами находят применение в некоторых задачах математической физики.

В работе используются следующие обозначения:;

$B_n = \{x \in R^n : |x| \le 1\}$ $S_{n-1} = \{x \in R^n : |x| = 1\}$; $|S_{n-1}| = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ -площадь сферы S_{n-1};

$|x|^{i\delta} = e^{i\delta \ln|x|}$.

В пространстве $L_2(B_n)$ рассмотрим оператор (1)

$$(A\varphi)(x) = \lambda\varphi(x) + a_1(x) \int\limits_{B_n} k_1(x,y)\varphi(y)dy + |x|^{i\delta} a_2(x) \int\limits_{B_n} k_2(x,y)\varphi(y)dy,$$

$x \in B_n$, где $\delta \in R,\ \delta \ne 0, a_j \in \mathbf{C}(B_n),\ j = 1,2$, а функция $k_j(x,y),\ j = 1,2$ удовлетворяет следующим условиям:

1) однородность степени (-n), то есть $k_j(\alpha(x),\alpha(y)) = \alpha^{-n} k_j(x,y),\ \forall\alpha > 0$;

2) инвариантность относительно группы вращений $SO(n)$, то есть

$$k_j(\omega(x),\omega(y)) = k_j(x,y),\ \forall\omega\in SO(n);$$

3) суммируемость, то есть $k_j = \int\limits_{R^n} \left|k_j(e_1\cdot y)\right| \, |y|^{-\frac{n}{2}} dy < \infty,\ e_1 = (1,0,\ldots,)$

Рассмотрим в $L_2(B_n)$ интегральный оператор (2) $(K\varphi)(x) = \int\limits_{B_n} k(x,y)\varphi(y)dy$, $x\in B_n$, ядро которого удовлетворяет условию (1).

Оператору A сопоставим оператор A^0, который определим формулой

$$A^0 = \lambda I + a_1(0)K_1 + |x|^{i\delta} a_2(x)K_2, \qquad (3)$$

где K_j- оператор вида (2) с ядром $k_j(x,y)$, $j=1,2$. Здесь и ниже мы отожествляем функции $|x|^{i\delta}$ и $a_j(x)$ с операторами умножения на эти функции. Рассмотрим разность $A-A^0$. Имеем $T = A - A^0 = (a_1(x)-a_1(0))K_1 + |x|^{i\delta}(a_2(x)-a_2(0))K_2$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}(a_j(x)-a_j(0)) = 0$, то оператор $(a_j(x)-a_j(0))K_j$ является компактным в $L_2(B_n)$ Следовательно, Т-компактный оператор. Поскольку $A = T + A^0$, то оператор A нетёров тогда и только тогда, когда нетёров оператор A^0, причем $indA = indA^0$.

Приступим к исследованию оператора A. В пространстве $L_2(B_n)$ рассмотрим уравнение, порожденное этим оператором:

$$\lambda\varphi(x) + a_1(0)\int\limits_{B_n} k_1(x,y)\varphi(y)dy + |x|^{i\delta} a_2(0)\int\limits_{B_n} k_2(x,y)\varphi(y)dy = f(x). \qquad (4)$$

Поскольку функции $k_j(x,y)$ удовлетворяют условию (2), то существуют такие функции $l_j(r,\rho,t)$, что $k_j(x,y) = l_j\left(|x|^2, |y|^2, x'\cdot y'\right)$. Учитывая это, и переходя в последнем соотношении к сферическим координатам $x = r\sigma, y = \rho\theta$, получим

$$
\begin{aligned}
&\lambda\Phi(r\sigma)+a_1(0)\int_0^1\int_{S_{n-1}}\frac{1}{r}D_1\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta\right)\Phi(\rho\theta)d\rho d\theta+\\
&+r^{i\delta}a_2(0)\int_0^1\int_{S_{n-1}}\frac{1}{r}D_2\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta\right)\Phi(\rho\theta)d\rho d\theta=F(r\sigma),
\end{aligned}
\qquad (5),
$$

$$
\Phi(r\sigma)=\varphi(r\sigma)r^{\frac{n-1}{2}};\quad F(r\sigma)=f(r\sigma)r^{\frac{n-1}{2}};
$$

$$
D_j(p,t)=l_j\left(1,p^2,t\right)p^{\frac{n-1}{2}},\quad j=1,2 \qquad (6)
$$

Функция $D_j(p,t)$ удовлетворяет следующему условию суммируемости

$$
\int_0^\infty\int_{-1}^1\left|D_j(\rho,t)\right|\rho^{-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{\frac{n-3}{n}}\,d\rho dt<\infty,\quad j=1,2 \qquad (7)
$$

Умножая обе части уравнения (5) на сферические гармоники $Y_{m\mu}(\sigma)$, интегрируя по единой сфере, и применяя формулу Функа-Гекке, получим следующую бесконечную диагональную систему одномерных интегральных уравнений (8)

$$
\lambda\Phi_{m\mu}(r)+a_1(0)\int_0^1\frac{1}{r}D_{1m}\left(\frac{\rho}{r}\right)\Phi_{m\mu}(\rho)d\rho+r^{i\delta}a_2(0)\int_0^1\frac{1}{r}D_{2m}\left(\frac{\rho}{r}\right)\Phi_{m\mu}(\rho)d\rho=F_{m\mu}(r),
$$

где $r\in(0,+\infty)$, $m\in\mathbf{Z}_+$, $\mu=1,2,\ldots,d_n(m)$, а $d_n(m)$- размерность пространства сферических гармоник порядка m.

$$
\Phi_{m\mu}(r)=\int_{s_{n-1}}\Phi(r\sigma)Y_{m\mu}(\sigma)d\sigma;\quad F_{m\mu}(r)=\int_{s_{n-1}}F(r\sigma)Y_{m\mu}(\sigma)d\sigma
$$

$$
D_{jm}=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-1}^1 D_j(\rho,t)P_m(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dt
$$

(9), при этом $P_m(t)$- многочлены Лежандра.

В пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим оператор A_m, формирующий левую часть уравнения (8)

$$\left(A_m\psi\right)(r)+a_1(0)\int_0^1\frac{1}{r}D_{1m}\left(\frac{\rho}{r}\right)\psi(\rho)d\rho+r^{i\delta}a_2(0)\int_0^1\frac{1}{r}D_{2m}\left(\frac{\rho}{r}\right)\psi(\rho)d\rho .$$

Лемма 1. Пусть $\lambda\neq 0$. Тогда существует число $m_0\in\mathbf{Z}_+$ такое, что оператор A_m обратим для всех $m>m_0$.

Доказательство. В пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим оператор $\left(K_{jm}\psi\right)(r)=a_j(0)\int_0^1\frac{1}{r}D_{jm}\left(\frac{\rho}{r}\right)\psi(\rho)d\rho$, где $m_0\in\mathbf{Z}_+$, $j=1,2$, $r\in(0,1)$. По теореме Харди-Литтлвуда справедлива оценка $\left\|K_{jm}\right\|\leq\left|a_j(0)\right|\int_0^\infty D_{jm}(\rho)\rho^{-\frac{1}{2}}d\rho$

(10).

Из равенства (9) и свойств многочленов Лежандра следует, что $D_{jm}(\rho)\to 0$ при $m\to\infty$ для почти всех $\rho\in(0,\infty)$. Тогда, используя мажоратную теорему Лебега с учетом оценки (7), получаем, что интеграл в неравенстве (10) стремится к нулю при $m\to\infty$.Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty}\left\|K_{jm}\right\|=0$. Поэтому существует число $m_0\in\mathbf{Z}_+$ такое, что $\left\|K_{1m}+r^{i\delta}K_{2m}\right\|<\lambda$ для всех $m>m_0$. Значит, оператор $A_m=\lambda I+K_{1m}+r^{i\delta}K_{2m}$ обратим для всех $m>m_0$ Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\lambda\neq 0$ и m_0- число, указанное в лемме 1. Оператор A вида (1) нётеров в пространстве $L_2(B_n)$ тогда и только тогда, когда нётеровы в пространстве $L_2(0,1)$ все операторы $A_m, m=0,1,2,\dots,m_0$, причем $indA=\sum\limits_{m=0}^{\infty}d_n(m)indA_m$ (11)

Литература:

1. Авсянкин О.Г. О С* - алгебре, порожденной многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами мультипликативного сдвига [Текст] // Докл. РАН. 2008. Т.419. №6. С.727-728

2. Авсянкин О.Г. О С* -алгебре, порожденной многомерными

интегральными операторами с однородными ядрами и коэффициентами вида $|x|^{ia}$ [Текст] // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2008.№5. С. 10-14.

3. Авсянкин О.Г. О многомерных интегральных операторах с однородными ядрами и осциллирующими радикальными коэффициентами [Текст] // Дифференц. уравнения. 2007. Т.43. №9. С. 1193-1196.

4. Авсянкин О.Г., Карапетянц Н.К. Многомерные интегральные операторы с однородными степени (-n) ядрами [Текст] //Докл. РАН. 1999. Т.368. С. 727-729

5. Павлов И.В., Скориков А.В. L_p со смешанной нормой на бесконечномерном торе [Текст] //Изв. вузов. Матем. 1986. №2. С 69-72.

6. Павлов И.В. О крайних лучах и интегральном представлении в конусе супермартингалов [Текст] //ТВП. 25:3(1980). С. 602-605

7. Karapetians N., Samko S. Equations with involute operators// Boston, Basel, Berlin: Birkhauser. 2001.427 p.

8. Avsyankin O.G., Karapetians N.K. Multidimensional integral operators with homogenous kernels [Текст] // J. Natur. Geometry. 16(1999).1-18p.

9. Михайлов Л.Г., Мухсинов А. Формула представления решений одного трехмерного немодельного сингулярного уравнения в частных производных [Текст] // Докл. РАН. 2010. Т.431. №1, С. 20-21.

10. Лаптев А.Г., Бородин Е.Н. Математическая модель процесса адсорбации при очистке сточных вод ТЭС от нефтепродуктов. [Электронный ресурс] //Инженерный вестник Дона. 2010. №4. – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n4y2010/261 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

11. Кадомцев М.И., Ляпин А.А., Тимофеев С.И. К вопросам построения эффективных алгоритмов расчета системы «сооружение-грунт». [Электронный ресурс] // Инженерный вестник Дона. 2012. №1. – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/719 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.