



Математическая модель электромагнитного взаимодействия эритроцитов в узком капилляре

А.В. Копыльцов

*Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»
имени В.И. Ульянова (Ленина)*

*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического
приборостроения*

Аннотация: Построена математическая модель, которая позволяет рассчитывать напряженность магнитного поля создаваемого подвижными зарядами, расположенными на мембране эритроцита. При движении по узким капиллярам эритроцитов в системе микроциркуляции они перекатываются вдоль капилляров подобно гусенице трактора. На поверхности эритроцитов расположены заряды, которые при движении вместе с мембраной эритроцита создают магнитное поле в окрестности эритроцита. Дискретные заряды распределены по поверхности эритроцита равномерно, их количество может достигать нескольких миллионов и заряды движутся вместе с мембраной эритроцита. Поверхность эритроцита аппроксимирована усеченным цилиндром. Дискретные заряды расположены равномерно по поверхности эритроцита и перемещаются по замкнутым кривым. Построен алгоритм расчета напряженности магнитного поля создаваемого подвижными зарядами, расположенными на поверхности эритроцитов, мембраны которых при движении по узкому капилляру перекатывается подобно гусеницам трактора. Алгоритм распараллелен и реализован на параллельном языке программирования Pascal.Net.

Ключевые слова: математическая модель, алгоритм, напряженность магнитного поля, электромагнитное взаимодействие, эритроцит, узкий капилляр.

Введение

При движении по узким капиллярам в системе микроциркуляции эритроциты перекатываются вдоль капилляров подобно гусеницам трактора [1-3]. На поверхности эритроцита расположены заряды, которые при движении вместе с мембраной эритроцита создают магнитное поле в окрестности эритроцита [4-10]. Задача состоит в том, что бы построить алгоритм, который позволял бы рассчитывать напряженность магнитного поля создаваемого подвижными зарядами, расположенными на мембране эритроцита.

Сложность решения поставленной задачи обусловлена тем, что дискретные заряды распределены по поверхности эритроцита равномерно, их

количество может достигать нескольких миллионов и заряды движутся вместе с мембраной эритроцита. Кроме того, эритроциты в одном капилляре могут быть расположены друг от друга достаточно близко и соседние капилляры могут быть на небольшом расстоянии друг от друга. Т.е. при разработке математической модели, алгоритма, программы и расчетах необходимо учитывать не только электромагнитные поля, создаваемые подвижными зарядами, расположенными на поверхности одного эритроцита, но и взаимовлияние зарядов, расположенных на различных эритроцитах, находящихся как в одном капилляре, так и соседних капиллярах.

Для решения такой задачи в полном объеме требуются мощные вычислительные ресурсы и параллельные алгоритмы. Первоначально рассмотрим один эритроцит, перемещающийся вдоль узкого капилляра.

Математическая модель и алгоритм расчета

Поверхность эритроцита аппроксимирована усеченным цилиндром радиуса R_{RBC} с образующими $L1$ и $L2$. Тогда объем эритроцита

$$V_{RBC} = \pi R_{RBC}^2 L1 + \pi R_{RBC}^2 (L2 - L1) / 2,$$

а площадь его поверхности

$$S_{RBC} = \pi R_{RBC}^2 + 2 \pi R_{RBC} L1 + \pi R_{RBC} (L2 - L1) + \pi R_{RBC} \sqrt{4 R_{RBC}^2 + (L2 - L1)^2} / 2.$$

Предполагается, что дискретные заряды расположены равномерно по поверхности эритроцита и перемещаются по замкнутым кривым, представляющим собой прямоугольные трапеции [4, 5, 6].

Заряд Q , перемещающийся со скоростью V , порождает на расстоянии R от заряда магнитное поле напряженности

$$H = \frac{QV \sin \alpha}{4\pi R^2},$$

где α – угол между радиус-вектором R и направлением скорости V (закон Био-Савара, рис. 1) [4, 5, 6, 11].

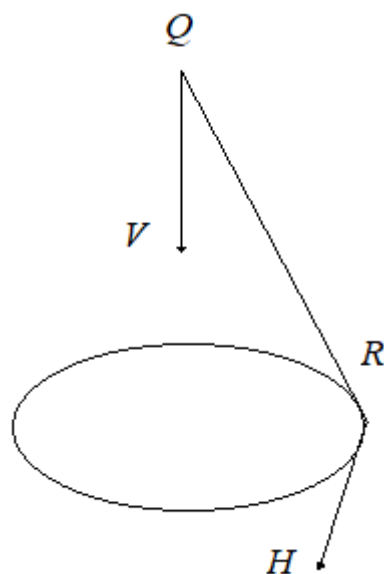


Рис. 1. - Заряд Q движется со скоростью V . На расстоянии R от заряда порождается магнитное поле напряженности H .

Если в первом приближении предположить, что среда изотропная и магнитные токи отсутствуют, то основные уравнения Максвелла могут быть записаны следующим образом: [12, 13, 14]

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0,$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} - \nabla \times H = J,$$

$$B = \mu H,$$

$$D = \epsilon E,$$

где H – напряженность магнитного поля, E – напряженность электрического поля, B – индукция магнитного поля, D – индукция электрического поля, ϵ - диэлектрическая и μ - магнитная проницаемости среды, J - вектор электрического тока образованного зарядами на мембране эритроцита, ∇ – оператор.

В декартовой системе координат x, y, z имеем

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$\nabla \times F = \text{rot}F = i \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + j \left(-\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + k \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right),$$

где i, j, k – единичные орты осей координат x, y, z , F – произвольная функция.

Тогда для декартовой системы координат x, y, z имеем

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z},$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{\partial H_z}{\partial y} - J_x,$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} - J_y,$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = -\frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial x} - J_z.$$

Эти уравнения можно переписать в виде уравнений в конечных разностях, решая которые численными методами можно получить распределение напряженностей E и H в окрестности эритроцита.

Предполагается, что в некоторый момент времени известны форма, объем и площадь поверхности эритроцита, заряд эритроцита и количество дискретных зарядов на поверхности эритроцита, скорость эритроцита и частота вращения мембраны эритроцита. Тогда алгоритм расчета напряженности магнитного поля в окрестности эритроцита в некоторой точке $A(x_0, y_0, z_0)$ может быть реализован следующим образом. Определяются координаты и скорости зарядов, расположенных на поверхности эритроцита, расстояния от этих зарядов до точки $A(x_0, y_0, z_0)$, углы между векторами скоростей зарядов и радиусами-векторами соединяющими заряды и точку

$A(x_0, y_0, z_0)$, напряженности магнитного поля создаваемые в точке $A(x_0, y_0, z_0)$ каждым из зарядов. Итоговая величина напряженности магнитного поля в точке $A(x_0, y_0, z_0)$ определяется как векторная сумма напряженностей создаваемых каждым из движущихся зарядов. Если нужно определить напряженность магнитного поля в некотором ограниченном пространстве, то нужно это пространство разбить на достаточно маленькие ячейки и вычислить напряженность в центре каждой из этих ячеек.

Результаты и их обсуждение

Напряженность H магнитного поля была рассчитана в окрестности эритроцита. При проведении расчетов брались значения параметров: заряд эритроцита $Q_{RBC}=0,32 \times 10^{-11}$ Кл, количество замкнутых траекторий на поверхности эритроцита $N_f=101$, количество дискретных зарядов $N_z=38594$, число оборотов мембраны эритроцита в секунду $w=20$ об/сек, объем эритроцита $V_{RBC}=94$ мкм³, площадь поверхности эритроцита $S_{RBC}=135$ мкм², радиус эритроцита $r=2$ мкм, большая и малая образующие усеченного цилиндра $L1=11,5$ мкм и $L2=3,4$ мкм, скорость движения эритроцита вдоль капилляра $V=100$ мкм/сек. Расчеты проводились с шагом $h=0,1$ мкм. На рис. 2 изображено распределение напряженности магнитного поля H (А/м) на расстоянии 1 мкм от передней части эритроцита при частоте вращения мембраны эритроцита $w=1$ об/сек в плоскости перпендикулярной оси капилляра (число шагов $Nh=81 \times 81$ от -4 мкм до 4 мкм по осям координат).

Из рисунка видно, что на небольших расстояниях от эритроцита распределение напряженности H неоднородно, что можно объяснить разнонаправленностью скоростей зарядов расположенных на разных сторонах эритроцита. Если направления линейной скорости эритроцита и зарядов однонаправлены, то скорости складываются, а в противном случае – вычитаются, и итоговая напряженность магнитного поля H либо увеличивается, либо уменьшается. При удалении от эритроцита

напряженность магнитного поля H уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния. В частности, при уменьшении расстояния d от 4 мкм до 1 мкм максимальное значение напряженности H увеличивается от $3,9 \times 10^{-7}$ А/м до $2,2 \times 10^{-6}$ А/м.

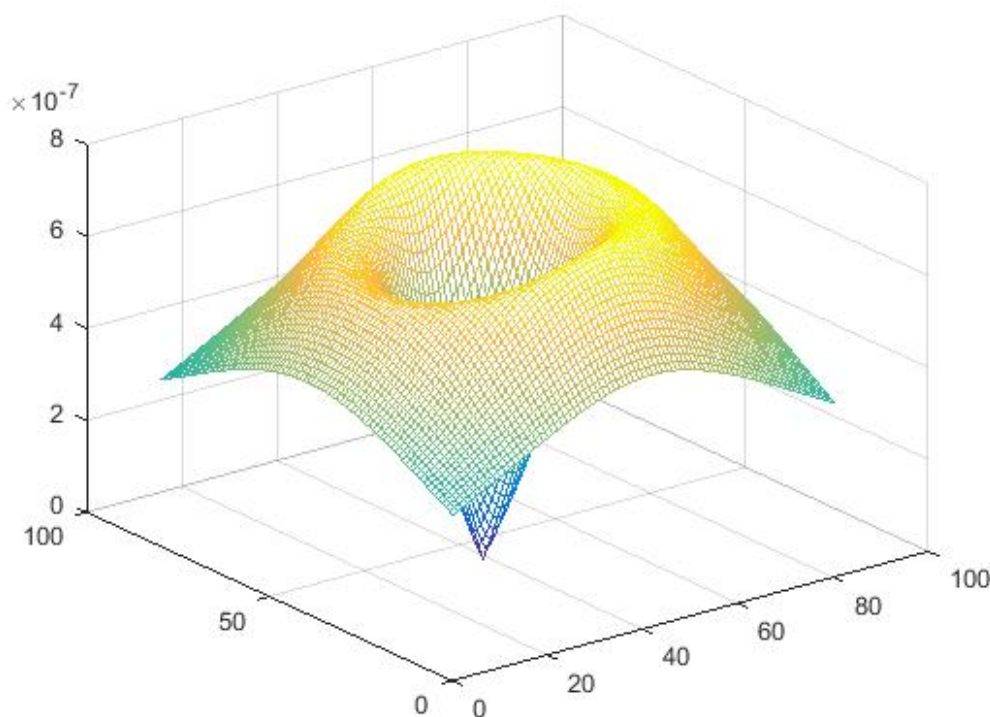


Рис. 2. - Распределение напряженности H при частоте вращения $\omega=1$ об/сек на расстоянии 1 мкм от передней части эритроцита.

Расчеты были проведены при различных значениях параметров для разных частот вращения мембраны эритроцита (до 50 об/сек), скоростях эритроцита (до 1000 мкм/сек) и расстояниях от эритроцита (до 10 мкм).

Заключение

Таким образом, если известны микрогемодинамические характеристики эритроцита (объем, площадь поверхности, форма, линейная скорость эритроцита; частота вращения мембраны эритроцита, количество и величины зарядов расположенных на мембране эритроцита), характеристики

среды (диэлектрическая и магнитная проницаемости), то можно определить характеристики электромагнитного поля в окрестности эритроцита. В частности, напряженность магнитного поля, которая на небольших расстояниях от мембраны неоднородна, а на больших расстояниях распределение напряженности близко к распределению напряженности создаваемого магнитным диполем. Однако на больших расстояниях напряженность магнитного поля мала. Если в узком капилляре находится несколько эритроцитов, то генерируемые ими электромагнитные поля взаимодействуют и порождают новое электромагнитное поле, которое с течением времени изменяется. В частности, если расстояния между эритроцитами больше 1-2 диаметров капилляра, то электромагнитное взаимодействие между эритроцитами незначительное. Если же расстояние между эритроцитами меньше, чем половина диаметра капилляра, то взаимодействие значительное и распределение напряженности магнитного поля в окрестности двух расположенных рядом эритроцитов существенно отличается от распределения магнитного поля в окрестности одного эритроцита или двух эритроцитов находящихся на значительном расстоянии друг от друга. Распределение напряженности магнитного поля также зависит от направления вращения мембран эритроцитов. В случае, когда эритроциты движутся по капиллярной сети, в которой капилляры расположены близко друг от друга, то магнитные поля эритроцитов находящихся в разных капиллярах взаимодействуют, и, в итоге, получаем новое распределение напряженности магнитного поля в окрестности капиллярной сети, которое изменяется во времени.

Литература

1. Bessonov N., Sequeira A., Simakov S., Vassilevskii Yu., Volpert V. Methods of Blood Flow Modelling // Math. Model. Nat. Phenom. 2016. V. 11. № 1. pp. 1-25.
-

2. Lighthill M. Pressure-forcing of tightly fitting pellets along fluid-filled elastic tubes // J. Fluid Mech. 1968. V. 34. pp. 113-143.

3. Kopyltsov A.V. Mathematical model of the motion of asymmetric erythrocytes along narrow capillaries // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. V. 26. № 6. pp. 535-553.

4. Копыльцов А.В. Двухмерная модель распределения магнитного поля между эритроцитами в узком капилляре // Инженерный вестник Дона, 2017, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4466

5. Копыльцов А.В. Математическое моделирование движения заряженного эритроцита по узкому капилляру. Моделирование и ситуационное управление качеством сложных систем: сб. докл. / СПб.: ГУАП, 2017. С. 27-30

6. Копыльцов А.В. Математическое моделирование распределения магнитного поля в окрестности эритроцита // Инженерный вестник Дона. 2018. №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4835

7. Копыльцов А.А. Модель классификации информации и алгоритм ее предварительной обработки для статических и динамических объектов // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ» (известия государственного электротехнического университета), серия «Информатика, управление и компьютерные технологии». 2013. № 6. С. 134-139.

8. Копыльцов А.А., Копыльцов А.В. Модели и алгоритмы слабоформализованных объектов и процессов. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2016. 163 с.

9. Cherpakov A.V., Soloviev A.N., Gricenko V.V., Mohanty S.C., Parshin D.Y., Butenko U.I., Bocharova O.V. Comparison of finite element modeling and analytical approach results for oscillating rod structure with crack // Инженерный вестник Дона, 2014, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2785

10. Голубев А.А., Игнатьев В.К. Измерение тензорных величин магнитного поля в микроструктурном анализе ферромагнитных материалов // Инженерный вестник Дона, 2011, №3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2011/473
11. Orear J. Physics. New York: Macmillan Publ. 1981. 624 p.
12. Курушин А.А., Пластиков А.Н. Проектирование СВЧ устройств в среде CST Microwave Studio. М.: Издательство МЭИ. 2011. 155 с.
13. Yee K.S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1966. vol.14. №4, pp.302-307.
14. Weiland T. A discretization method for the solution of Maxwell's equations for six-component fields // Electronics and Communications AEEU. 1977. Vol.31, №3. pp.116–120.

References

1. Bessonov N., Sequeira A., Simakov S., Vassilevskii Yu., Volpert V. Math. Model. Nat. Phenom. 2016. V. 11. № 1. pp. 1-25.
 2. Lighthill M. J. Fluid Mech. 1968. V.34. pp.113–143.
 3. Kopyltsov A.V. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. V. 26. № 6. pp. 535–553.
 4. Kopyltsov A.V. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2017, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4466.
 5. Kopyltsov A.V. Modelirovanie i situacionnoe upravlenie kachestvom slozhnyh system [Modeling and situational management of the quality of complex systems]. SPb.: GUAP. 2017. pp. 27-30.
 6. Kopyltsov A.V. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2018, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4835
 7. Kopyltsov A.A. Journal of Saint-Petersburg State Electrotechnical University «LETI» (Rus). 2013. № 6. pp. 134-139.
-



8. Kopyltsov A.A., Kopyltsov A.V. Modeli i algoritmy slaboformalizovannykh ob"yektov i protsessov [Models and algorithms of weakly formalized objects and processes]. SPb: LETI. 2016. 163 p.
9. Cherpakov A.V., Soloviev A.N., Gricenko V.V., Mohanty S.C., Parshin D.Y., Butenko U.I., Bocharova O.V. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2014, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2785
10. Golubev A.A., Ignatiev V.K. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2011, №3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2011/473
11. Orear J. Physics. New York: Macmillan Publ. 1981. 624 p.
12. Kurushin A.A., Plastikov A.N. Proyektirovaniye SVCH ustroystv v srede CST Microwave Studio [Design of microwave devices in CST Microwave Studio environment]. M.: MEI. 2011. 155 p.
13. Yee K.S. IEEE Trans. Antennas Propagat. 1966. vol.14. №4, pp.302-307.
14. Weiland T. Electronics and Communications AEEU. 1977. Vol.31, №3. pp.116–120.