Метод управления движением гексакоптера в трехмерной среде с препятствиями на базе динамических отталкивающих сил

А.Е.Кульченко, В.С.Лазарев, М.Ю.Медведев

Южный федеральный университет, Таганрог

Аннотация: В статье предлагается метод формирования динамических репеллеров при управлении движением беспилотных летательных аппаратов в трехмерных средах с препятствиями. В качестве летательного аппарата рассматривается гексакоптер Erle-HexaCopter. Статья содержит краткое описание математической модели гексакоптера и позиционно-траекторных алгоритмов управления движением. В статье был предложен, проанализирован и промоделирован в среде Matlab метод, базирующийся на представлении препятствий динамическими репеллерами. Рассмотрены случаи с одним или несколькими неподвижными препятствиями, результаты моделирования приведены. В заключении сформулированы выявленные особенности разработанного метода.

Ключевые слова: гексакоптер, неформализованная среда, обход препятствий, управление движением, репеллер, подвижный объект.

Введение

На сегодняшний день актуально использование беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) для решения широкого круга задач [1]. При этом, повышение автономности БПЛА в условиях неопределенной среды требует разработки новых методов управления движением. В данном исследовании решается задача движения одиночного летального аппарата к цели в неопределенной трехмерной среде с препятствиями, расположение которых заранее не известно. Для решения этой задачи используется метод планирования траектории, базирующийся на использовании динамических репеллеров, который был предложен в работах [2, 3] для двумерных сред. В данной статье метод расширен для использования в трехмерном пространстве, что сделало возможным его применение для летательных аппаратов.

В настоящий момент разрабатывается большое число различных видов БПЛА[4]. Например, достаточно часто объектом исследования зарубежных [5-7] и отечественных [8, 9] ученых выступает квадрокоптер. В работе [10], объектом исследований является гексакоптер, который отличается от квадракоптера количеством и расположением двигателей, что должно быть учтено в системе управления движением. Гексакоптер обладает большей надежностью и грузоподъемностью по сравнению с квадрокоптером, что говорит об актуальности исследования БПЛА данного вида.

1 Математическая модель гексакоптера

Внешний вид гексакоптера Erly-Hexacopterdrone представлен на рис. 1, его параметры представлены в таблице № 1.

Таблица № 1

Параметры Erle-HexaCopterdrone

Параметр	Значение
Масса, кг	1.078
Диаметр гексакоптера, м	0.55
Масса полезной нагрузки, кг	до 2.5
Масса подвеса, кг	0.2
Максимальная скорость полета, м/с	3

Гексакоптер снабжен подвесом среднего размера для крепления различного оборудования. В зависимости от устанавливаемого оборудования, вес и габариты автономного комплекса на базе гексакоптера могут изменяться.

Для описания движения гексакоптера применяются две системы координат (рис.1). Первая из таких систем – неподвижная система отсчета K^0 (с осями O^0X^0, O^0Y^0, O^0Z^0), связанная с некоторой точкой на земной поверхности. Эта система называется земной системой координат. Её взаимно перпендикулярные оси O^0X^0 и O^0Z^0 располагаются в горизонтальной плоскости, а ось O^0Y^0 перпендикулярно к ним и направлена вертикально вверх относительно поверхности земли, как плоскости.

Вторая система координат K (с осями OX, OY, OZ) жестко связывается с телом гексакоптера. Поэтому ее называют связанной, или системой координат корпуса гексакоптера. Её начало совмещено с положением центра тяжести гексакоптера O. Ось OX направляется вдоль продольной оси симметрии гексакоптера в его нос, а оси OY и OZ в перпендикулярных к оси OX вертикальной и горизонтальной плоскостях симметрии корпуса гексакоптера.

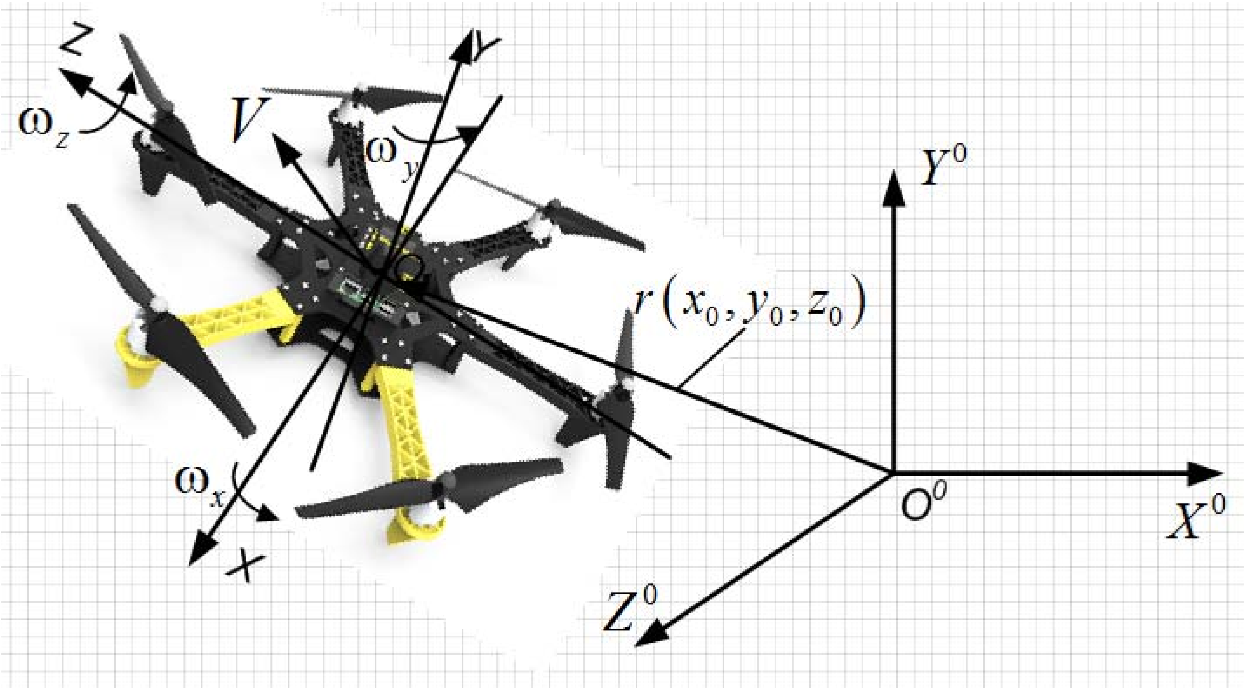

Рис.1. – Используемые в модели системы координат K^0 и K

Тогда положение и ориентация гексакоптера в земной системе координат определяются тремя координатами x_0, y_0, z_0 и тремя углами Эйлера. Положительные направления всех поворотов соответствуют вращению против часовой стрелки, вдоль осей вращения в начало координат. Уравнения кинематики гексакоптера имеют вид (1):

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{y}_0\\ \dot{z}_0\\ \dot{\psi}\\ \dot{\vartheta}\\ \dot{\gamma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A(\psi,\vartheta,\gamma) & 0\\ 0 & A_{\omega}(\psi,\vartheta,\gamma)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_x\\ V_y\\ V_z\\ \omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix},\qquad(1)$$

$$A(\psi,\vartheta,\omega)=\begin{bmatrix}\cos\psi\cos\vartheta & \sin\psi\sin\gamma-\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma & \sin\psi\cos\gamma+\cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\cos\gamma & -\cos\vartheta\sin\gamma\\ -\sin\psi\cos\vartheta & \cos\psi\sin\gamma+\sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma & \cos\psi\cos\gamma-\sin\psi\sin\vartheta\sin\gamma\end{bmatrix}$$

$$A_{\omega}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{\cos\gamma}{\cos\theta} & -\dfrac{\sin\gamma}{\cos\theta}\\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma\\ 1 & -tg\theta\cos\gamma & tg\theta\sin\gamma\end{bmatrix}.$$

Поступательное движение гексакоптера описывается следующими уравнениями(2):

$$\begin{aligned}&m\left(\dot{V}_x+\omega_y V_z-\omega_z V_y\right)=G_x,\\ &m\left(\dot{V}_y+\omega_z V_x-\omega_x V_z\right)=G_y+P_y,\\ &m\left(\dot{V}_z+\omega_x V_y-\omega_y V_x\right)=G_z,\end{aligned}\qquad(2)$$

где P_y – проекция главного вектора тяги, создаваемой двигателями гексакоптера G_x, G_y, G_z – проекции силы тяжести на оси связанной системы координат; V_x, V_y, V_z – проекции на оси связанной системы вектора линейной скорости движения начала координат системы K относительно земной системы K^0; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции на оси связанной системы координат вектора угловой скорости движения начала координат системы K относительно земной системы K^0.

Уравнения динамики вращательного движения гексакоптера при постоянной массе и моментах инерции в проекциях на оси системы K имеют следующий вид (3):

$$\begin{aligned} &J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = N_x, \\ &J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z = N_y, \\ &J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = N_z \end{aligned} \qquad (3)$$

где J_x, J_z, J_y - моменты инерции, N_x, N_y, N_z – проекции на оси связанной системы координат K вектора главного момента всех действующих на гексакоптер сил [11].

Построим модель исполнительных механизмов. К основным характеристикам винта относятся:

– координаты винтов в связанной с гексакоптером системе координат;

– зависимость тяги винта от числа оборотов.

Координаты винтов определяются величиной l_k и углом φ_k. Пусть зависимость тяги винта от числа оборотов определяется выражением:

$$\tau_i = k\omega_i^2,\ i = \overline{1,6},$$

где τ_i – момент, развиваемый винтом; ω_i – частота вращения винта; k – положительный коэффициент, определяемый расчетным или экспериментальным путем.

В этом случае управляющие силы и моменты будут иметь вид:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ k\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 + \omega_5^2 + \omega_6^2\right) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

$$\bar{N}_P = \begin{bmatrix} kl\left(\omega_1^2 + \cos\varphi_k\omega_2^2 + \cos\varphi_k\omega_6^2 - \omega_4^2 - \cos\varphi_k\omega_3^2 - \cos\varphi_k\omega_5^2\right) \\ b\left(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2 - \omega_5^2 + \omega_6^2\right) \\ kl\sin\varphi_k\left(\omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_5^2 - \omega_6^2\right) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где b – положительный коэффициент, определяемый экспериментальным или расчетным путем.

3 Позиционно-траекторный регулятор

Рассмотрим задачу движения гексакоптера в заданную точку. Планировщик перемещений гексакоптера должен вырабатывать с дискретностью Δt требуемые координаты текущей целевой точки $p^c\left(x_0^c, y_0^c, z_0^c\right)$, скорость перемещения V_k, угол рысканья ψ^0.

Синтезируем позиционно-траекторный алгоритм управления, обеспечивающий движение гексакоптера в соответствии с заданием, поступающим от планировщика.

Вначале по координатам гексакоптера в текущий момент времени $p(x_0, y_0, z_0)$ и координатам текущей целевой точки $p^c\left(x_0^c, y_0^c, z_0^c\right)$ вычисляем направляющий вектор [12] в соответствии с выражением (6).

$$p_n = \left[x_0^c - x_0;\ y_0^c - y_0;\ z_0^c - z_0\right]^T \tag{6}$$

Требуемые линейные скорости перемещения (7) составят:

$$V_x^0 = \frac{V_k\left(x_0^c - x_0\right)}{|p_n|},\ V_y^0 = \frac{V_k\left(y_0^c - y_0\right)}{|p_n|},\ V_z^0 = \frac{V_k\left(z_0^c - z_0\right)}{|p_n|}. \tag{7}$$

В силу того, что гексакоптер не имеет управляющих сил, действующих вдоль осей *Ox* и *Oz* связанной системы координат, соответствующие уставки по скоростям преобразуются в задающие воздействия по углам:

$$e_1 = \begin{bmatrix} \psi - \psi_0 \\ \vartheta + k_1\left(V_x - V_x^0\right) \\ \gamma + k_2\left(V_z - V_z^0\right) \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

$$e_2 = V_y - V_y^0 \qquad . \qquad (9)$$

В соответствии с методом позиционно-траекторного управления потребуем, чтобы ошибки (8), (9) удовлетворяли следующим уравнениям

$$\ddot{e}_1 + T_2\dot{e}_1 + T_3 e_1 = 0, \qquad (10)$$

$$\dot{e}_2 + T_1 e_2 = 0, \qquad (11)$$

где T_1, T_2, T_3 – матрицы коэффициентов регулятора.

Применяя метод позиционно-траекторного управления, получаем выражения для вычисления управляющих сил и моментов:

$$\begin{cases} F_{uy} = -mT_1e_2 - mg\cos\vartheta\cos\gamma - m\left(\omega_z V_x - \omega_x V_z\right) \\ N_u = -\begin{bmatrix} -\left(J_z - J_y\right)\omega_y\omega_z \\ -\left(J_x - J_z\right)\omega_x\omega_z \\ -\left(J_y - J_x\right)\omega_y\omega_x \end{bmatrix} - \left(A_\omega + B_\omega\right)^{-1}\begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}\left(\dot{A}_\omega\omega + f_\omega + T_2\dot{e}_1 + T_3e_1\right) \end{cases} \qquad (12)$$

где

$$B_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1V_z & k_1V_y \\ -k_2V_y & k_2V_x & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\dot{A}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\dot{\gamma}\sin\gamma}{\cos\vartheta} + \dfrac{\dot{\vartheta}\cos\gamma\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta} & -\dfrac{\dot{\gamma}\cos\gamma}{\cos\vartheta} - \dfrac{\dot{\vartheta}\sin\gamma\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta} \\ 0 & \dot{\gamma}\cos\gamma & -\dot{\gamma}\sin\gamma \\ 0 & \dot{\gamma}\sin\gamma\tan\vartheta - \dot{\vartheta}\cos\gamma\left(1+\tan^2\vartheta\right) & \dot{\gamma}\cos\gamma\tan\vartheta + \dot{\vartheta}\sin\gamma\left(1+\tan^2\vartheta\right) \end{bmatrix}.$$

$$f_{\omega}=\begin{bmatrix} 0 \\ k_1\left(\dfrac{\dot{G}_x}{m}-\omega_y\dot{V}_z-\omega_z T_1\left(V_y-V_y^0\right)\right) \\ k_2\left(\dfrac{\dot{G}_z}{m}+\omega_x T_1\left(V_y-V_y^0\right)+\omega_y\dot{V}_x\right)\end{bmatrix}.$$

Управляющие силы и моменты (12) создаются винтами. Распределение управляющих сил и моментов между тягами винтов осуществляется на основе выражений (4) и (5), объединяя которые в единую систему, получим

$$N_u\begin{bmatrix}\omega_1^2\\ \omega_2^2\\ \omega_3^2\\ \omega_4^2\\ \omega_5^2\\ \omega_6^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_y\\ N_x\\ N_y\\ N_z\end{bmatrix}, \qquad (13)$$

$$N_u=\begin{bmatrix} k_v & k_v & k_v & k_v & k_v & k_v \\ 0 & k_v l_k\sin\varphi_k & k_v l_k\sin\varphi_k & 0 & -k_v l_k\sin\varphi_k & -k_v l_k\sin\varphi_k \\ -b_v & b_v & -b_v & b_v & -b_v & b_v \\ k_v l_k & k_v l_k\cos\varphi_k & -k_v l_k\cos\varphi_k & -k_v l_k & -k_v l_k\cos\varphi_k & k_v l_k\cos\varphi_k \end{bmatrix}.$$

Решение (14) линейной прямоугольной системы алгебраических уравнений (13) проводится на основе псевдоинверсной матрицы, которая обеспечивает минимум среднеквадратичной ошибки при решении [11]:

$$\begin{bmatrix}\omega_1^2\\ \omega_2^2\\ \omega_3^2\\ \omega_4^2\\ \omega_5^2\\ \omega_6^2\end{bmatrix} = N_u^+ \begin{bmatrix}P_y\\ N_x\\ N_y\\ N_z\end{bmatrix}, \qquad (14)$$

где N_u^+ – псевдоинверсная матрица в смысле определения [13].

4 Обход препятствий с использованием динамических репеллеров

Рассмотрим применение метода динамических репеллеров для задачи обхода препятствия гексакоптером. Препятствия, встречающиеся на пути гексакоптера, представляются в виде репеллеров, формирование которых в двумерном случае продемонстрировано на рис.2. При этом препятствие слева должно формировать динамическую силу, выталкивающую гексакоптер вправо, а препятствие справа – влево. На рис.2 y_{1i-1} - координата препятствия слева, y_{1i+1} - координата препятствия справа, F_r – вспомогательная переменная, использующаяся для формирования отталкивающих сил.

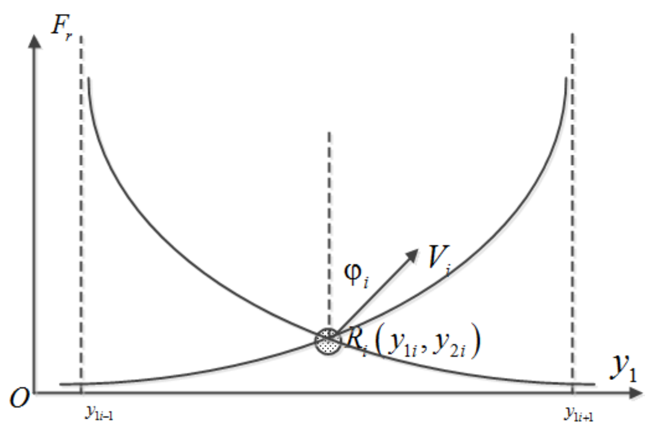

Рис.2. – Формирование репеллеров

Отталкивающие силы формируются с помощью динамических звеньев, на основе информации о расстоянии до препятствий. Пусть отталкивающая от репеллера сила является степенной функцией расстояния между соседними роботами вдоль оси Oy_1. Тогда данная идея реализуется следующим уравнением:

$$\dot{z} = \frac{1}{y_{1i} - y_{1i-1}} - \frac{1}{y_{1i+1} - y_{1i}} \quad (15).$$

Как следует из уравнения (15), переменная $\dot{z}$ зависит от величин, обратных расстояниям от робота до препятствия.

В случае БПЛА, имеет место движение в трехмерной среде, из точки $p_0\left(x^0, y^0, z^0\right)$. Пусть гексакоптер движется к некоторой точке $p_0\left(x_ц^0, y_ц^0, z_ц^0\right)$ и при движении ему встретилось препятствие (рис. 3).

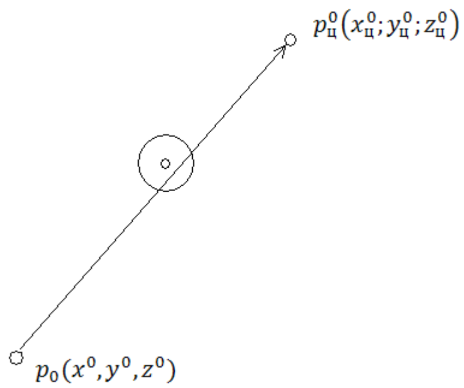

Рис. 3. – Встреча с препятствием на пути к цели

Данное препятствие становится репеллером и начинает формировать динамическую отталкивающую силу. Нужно рассчитать координаты промежуточной целевой точки $p_ц\left(x_ц, y_ц, z_ц\right)$, в которую данная сила отбросит гексакоптер. Основываясь на выражении (15) находим:

$$\dot{\xi}_1 = \frac{1}{x_0 - x_{pl}} - \frac{1}{x_{pr} - x_0}, \quad (16)$$

значения функции отталкивания, сначала по координате x где x_{pr}, x_{pl} координаты x препятствия слева и справа соответственно (рис. 4).

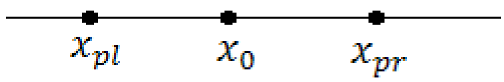

Рис.4. – Координаты гексакоптера и препятствий по оси x

Затем по координатам y (17) и z (18) расчет идет аналогичным образом с ранее рассчитанным значением по координате x (16):

$$\dot{\xi}_2 = \frac{1}{y_0 - y_{pl}} - \frac{1}{y_{pr} - y_0}, \tag{17}$$

$$\dot{\xi}_3 = \frac{1}{z_0 - z_{pl}} - \frac{1}{z_{pr} - z_0}, \tag{18}$$

Рассчитываем координаты точки (19), которая станет результатом влияния функций отталкивания от препятствий:

$$[x_ц, y_ц, z_ц] = [x_ц^0, y_ц^0, z_ц^0](1 + \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix}), \tag{19}$$

Результат действия динамических отталкивающих сил демонстрируется на рис. 5.

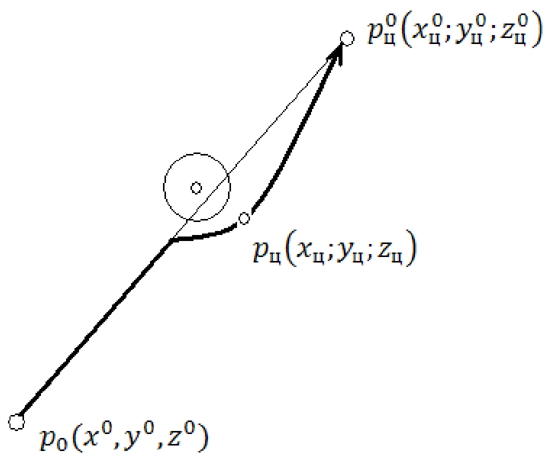

Рис.5.–Влияние динамических сил отталкивания на подвижный объект

5 Результаты моделирования

Для моделирования рассмотрено два случая: 1) одиночное препятствие, 2) несколько препятствий. Условия моделирования даны в таблице № 2.

Таблица 2.

Условия моделирования

Ограничение скорости, м/с	0,1
Допустимое расстояние *r*, м	0,6
Параметры (одиночное препятствия)	Высота куба h =0,4 , Положение x=4, y=3,z=4,
Параметры (несколько препятствий)	Высота куба h =0,4 x_1=2.8, y_1=3.8; z_1=2.8, x_2=5, y_2=3; z_2=5, x_3=6.5, z_3=6, y_3=2; x_4=4, z_4=7, y_4=3; x_5=7, z_5=7,y_5=3;
Исходные координаты ПО	x=0, y=3, z=2,

Результаты моделирования для обоих случаев представлены на рис. 6 и рис. 7.

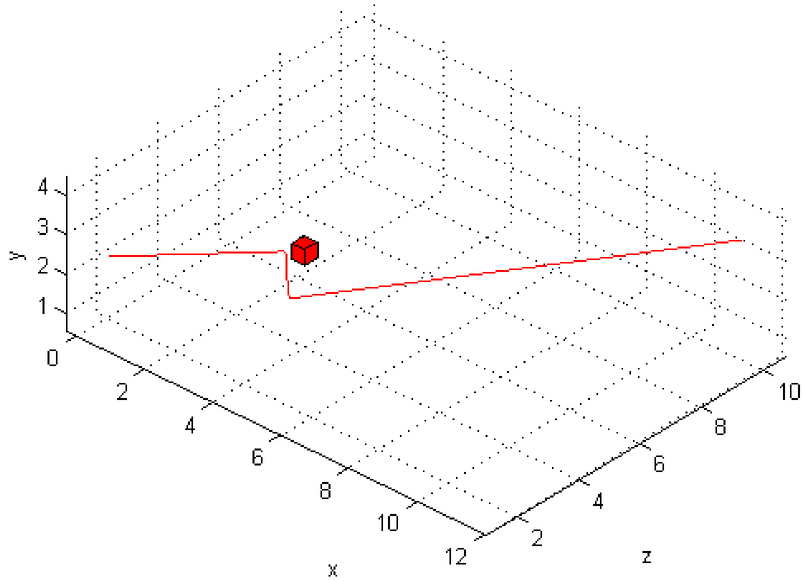

Рис.6. – Обход одиночного препятствия.

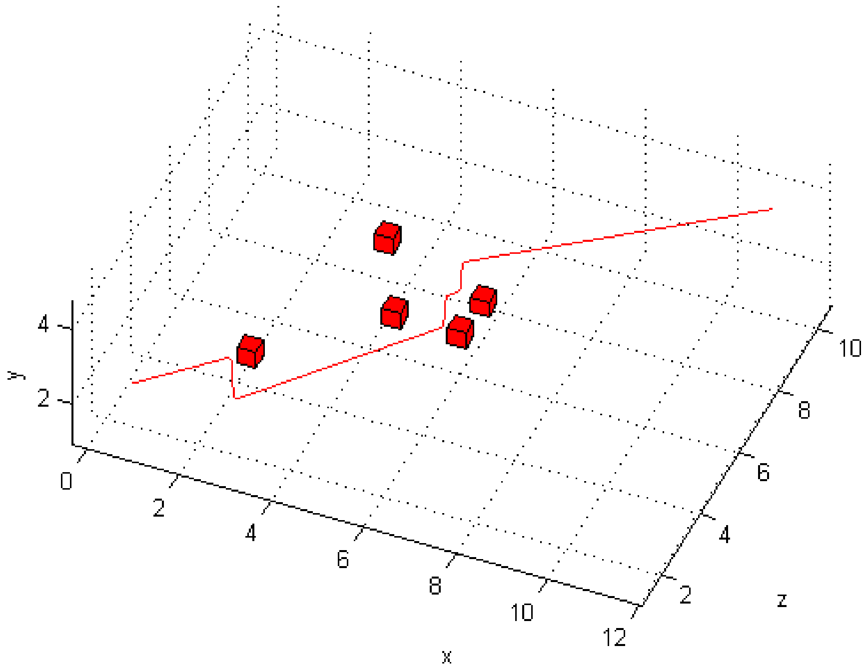

Рис. 7. – Обход группы препятствий

Результаты демонстрируют работоспособность предложенного метода управления движением. В обоих случаях гексакоптер меняет траекторию движения, огибая все препятствия.

Заключение

В работе представлен метод управления движением гексакоптера в неформализованной трехмерной среде с препятствиями. Данный метод отличается от метода потенциальных полей тем, что в нем используются динамические отталкивающие силы, позволяющие обходить препятствия без картографирования. Необходимо отметить, что метод позволяет увеличить или уменьшить допустимое расстояние до препятствий в зависимости от условий задачи. Метод планирования траектории с использованием динамических репеллеров, может быть эффективен в задачах группового управления [3].

Благодарности

Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ № 16-08-00012 А.

Литература

1. Кульченко А.Е. Структурно-алгоритмическая организация автопилота робота-вертолета// Инженерный вестник Дона, 2011, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2011/330/.

2. Гузик В.Ф., Косенко Е.Ю., Крухмалев В.А., Медведев М.Ю., Переверзев В.А., Пшихопов, В.Х. Пьявченко О.А., Сапрыкин Р.В., Соловьев В., Финаев В.И., Чернухин Ю.В., Шаповалов И. Интеллектуальное планирование траекторий подвижных объектов в средах с препятствиями. М.: Физматлит, 2014. 350 с.

3. Белоглазов Д.А., Гайдук А.Р., Косенко Е.Ю., Медведев М.Ю., Пшихопов В.Х., Соловьев В.В., Титов А.Е., Финаев В.И., Шаповалов И.О.Групповое управление подвижными объектами в неопределенных средах. М.: Физматлит, 2015. 304 с.

4. Горбунов А.А., Горбунова Е.Б. К вопросу об особенностях систем управления БПЛА с машущим крылом// Инженерный вестник Дона, 2013, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1816/.

5. Madani T., Benallegue A. Backstepping control for a quadrotor helicopter // Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2006. pp. 3255-3260.

6. Castillo P., Dzul A., Lozano R. Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft// IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2004. № 12 (4). pp. 510-516.

7. Gong X., Hou Z.-C., Zhao C.-J., Bai Y., Tian Y.-T. Adaptive Backstepping Mode Trajectory Tracking Control for a Quad-rotor // International Journal of Automation and Computing, 2012. № 9 (5). pp. 555-560.

8. Огольцов И.И., Рожнин Н.Б., Шеваль В.В. Математическая модель квадрокоптера аэромобильного лидара // Известия ТулГУ. Технические науки. 2012. № 1. С. 47-55.

9. Петраневский И.В., Борисов О.И., Громов В.С., Пыркин А.А. Управление квадрокоптером с компенсацией ветровых возмущений // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. №6 С. 1045-1053.

10. Арзамасцев А.А., Образцов Д.В. Исследование основных характеристик полета гексакоптера // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. №2 С.663-665.

11. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1983. 320 с.

12. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Том первый: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Дрофа, 2004. 288 с.

13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.

References

1. Kulchenko A.E. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2011, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2011/330/.

2. Guzik V.F., Kosenko E.Ju., Kruhmalev V.A., Medvedev M.Ju., Pereverzev V.A., Pshihopov V.Kh., Pjavchenko O.A., Saprykin R.V., Solovjev V., Finaev V.I., Chernuhin Ju.V., Shapovalov I. Intellektualnoe planirovanie traektorij podvizhnyh objektov v sredah s prepjatstvijami[Intellectual planning of vehicles trajectories in environments with obstacles]. M.: Fizmatlit, 2014. 350 p.

3. Beloglazov D.A., Gajduk A.R., Kosenko E.Ju., Medvedev M.Ju.,Pshihopov V.Kh., Solovjev V.V., Titov A.E., Finaev V.I., Shapovalov I.O. Gruppovoe upravlenie podvizhnymi objektami v neopredelennyh sredah[Vehicles group control in uncertain environments]. M.: Fizmatlit, 2015. 304 p.

4. Gorbunov A.A., Gorbunova E.B. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1816/.

5. Madani T., Benallegue A. Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2006. pp. 3255-3260.

6. Castillo P., Dzul A., Lozano R. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2004. № 12 (4). pp. 510-516.

7. Gong X., Hou Z.-C., Zhao C.-J., Bai Y., Tian Y.-T. International Journal of Automation and Computing. 2012.№ 9 (5). pp. 555-560.

8. Ogolcov I.I., Rozhnin N.B., Sheval V.V. Izvestija TulGU. Tehnicheskie nauki. 2012. № 1. pp. 47-55.

9. Petranevskij I.V., Borisov O.I., Gromov V.S., Pyrkin A.A. Nauchno-tehnicheskij vestnik informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki. 2015. №6 pp.1045-1053.

10. Arzamascev A.A., Obrazcov D.V. Vestnik Tambovskogo universiteta. Serija: Estestvennye i tehnicheskie nauki. 2016. №2 pp.663-665.

11. Bjushgens G.S., Studnev R.V. Dinamika samoleta. Prostranstvennoe dvizhenie[Plane dynamics. Three-dimensional motion.]. M.: Mashinostroenie, 1983. 320 p.

12. Bugrov Ja.S., Nikolskij S.M. Vysshaja matematika. Tom pervyj: jelementy linejnoj algebry i analiticheskoj geometrii [The higher mathematics. Volume first: elements of the linear algebra and analytical geometry.]. M.: Drofa, 2004. 288 p.

13. Gantmaher F.R. Teorija matric [Matrixes theory]. 5-e izd. M.: FIZMATLIT, 2004. 560 p.