Инженерный вестник Дона, №9 (2019)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n9y2019/6234

Использование различных критериев при решении неоднородной мини-максной задачи

В. Г. Кобак[1], А.П. Кузин[1], А. Г. Жуковский[2], А.Н. Кузина[1]

[1]Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону
[2]Северо-Кавказский филиал Московского технического университета связи и информатики, г. Ростов-на-Дону

Аннотация: В статье рассматривается решение неоднородной минимаксной задачи при помощи генетических алгоритмов, а также с использованием нескольких вариантов реализации алгоритма Плотникова-Зверева. Описываются три вида критериев для задания функции оценки приспособленности особей. Проводится сравнение эффективности работы генетических алгоритмов по сравнению с алгоритмом Плотникова-Зверева, при использовании различных критериев функции приспособленности особей. По результатам вычислительного эксперимента был сделан вывод, что использование квадратичного критерия для модифицированной модели Голдберга, с использованием двухточечного кроссовера увеличивает эффективность работы генетического алгоритма, а точность этого решения выше по сравнению с решениями, полученными при помощи модификаций алгоритма Плотникова-Зверева.
Ключевые слова: теория расписаний, неоднородная минимаксная задача, модифицированная модель Голдберга, генетический алгоритм, минимаксный критерий, квадратичный критерий, списочные алгоритмы, кубический критерий, алгоритм Плотникова-Зверева.

Введение

Одними из наиболее часто решаемых задач теории расписаний являются NP-полные задачи, для которых практически невозможно подобрать точное решение за полиноминально быстрое время. К таким задачам относится и рассматриваемая в статье неоднородная минимаксная задача [1-3]. Разработка различных методов, позволяющих получить близкое к оптимальному приближенное решение, является актуальной проблемой. Такие решения находятся как списочными методами, так и с использованием генетических алгоритмов, а точнее различными моделями. В данной работе будут рассмотрены наиболее популярные критерии, которые используют как списочные, так и генетические алгоритмы.

Минимаксный критерий.

Для сформированной особи записывается время выполнения всех задач на каждом устройстве. Для каждого вычислительного устройства это время суммируется и записывается в массив F[i], где i это номер вычислительного устройства.[4,5] В качестве результата функции приспособленности принимается максимальное время из массива F. Далее на примере рассмотрим расчет минимаксного критерия. Пусть задана матрица задач T:

$$T = \begin{Bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 1 \end{Bmatrix}$$

Так же имеется i^{ая} особь со следующими генами: $A[i] = \{1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 3\}$.

Рассчитаем исходя из исходных данных загруженность устройств, а именно, значение суммы времени выполнения заданий для каждого устройства (Рисунок 1).

	Минимаксный критерий		
	F[1]	**F[2]**	**F[3]**
	5	0	0
	0	2	0
	6	0	0
	0	5	0
	0	0	1
Сумма F[i]=	**11**	7	1

Рисунок 1 – Расчет минимаксного критерия

Исходя из полученных результатов выбираем максимальное значение 11, которое и будет являться значением функции приспособленности.

Квадратичный критерий.

Является схожим с минимаксным критерием, но отличается от него тем, что берется не максимальное значение загруженности, а вычисляется сумма квадратов. Значение квадратичного для примера с минимаксным критерием будет равно $11^2+7^2+1^2=171$.

Кубический критерий.

Является схожим с минимаксным критерием, но отличается от него тем, что берется не максимальное значение загруженности, а вычисляется сумма кубов значений массива F. Значение кубического критерия для примера с минимаксным критерием будет равно $11^3+7^3+1^3=1675$.

Алгоритм Плотникова-Зверева с минимаксным критерием.

Задача задается в виде матрицы, в которой каждая строка i представляет собой одну задачу, а каждый j столбец устройство обработки. Значения, находящиеся на пересечении строк и столбцов, отображают время выполнения i задачи на j вычислительном устройстве. Первым шагом для задач вычисляется сумма времени выполнения на каждом устройстве. После чего допустимо два варианта использования алгоритма: матрица сортируется либо по возрастанию, либо по убыванию в зависимости от значения рассчитанного параметра. Далее в первой строке выбирается элемент с минимальным значением и в список решений List заносится номер устройства j, на котором данная задача выполнялась. Остальные элементы строки приравниваются к нулю. Элементы первой строки прибавляются ко второй строке и с учетом этого ищется минимальный элемент во второй строке, номер которого заносится в список List, остальные элементы строки приравниваются нулю, кроме тех к которым было прибавлено значение отличное от 0. Алгоритм повторяется до тех пор, пока не будут обработаны все строки, а результатом алгоритма будет являться список List, с помощью которого генерируется особи начального поколения. [6,7] Рассмотрим работу алгоритма на примере 4 задач и 3 устройств обработки с известным временем выполнения. На рисунке 2 представлена матрица, показывающая время выполнения задач на каждом из устройств обработки, с вычисленной суммой.

	Устройство 1	Устройство 2	Устройство 3	Сумма
Задача 1	4	3	2	9
Задача 2	4	2	5	11
Задача 3	3	2	8	13
Задача 4	5	3	8	16

Рисунок 2 – Первый шаг алгоритма Плотникова-Зверева

Далее матрица сортируется по убыванию в зависимости от суммы элементов каждой строки (Рисунок 3).

	Устройство 1	Устройство 2	Устройство 3	Сумма
Задача 1	5	3	8	16
Задача 2	3	2	8	13
Задача 3	4	2	5	11
Задача 4	4	3	2	9

Рисунок 3 – Второй шаг алгоритма Плотникова-Зверева

В первой строке ищется минимальный элемент, в данном случае равный 3, его номер 2 заносится в список List, остальные элементы строки обнуляются (Рисунок 4).

	Устройство 1	Устройство 2	Устройство 3
Задача 1	0	**3**	0
Задача 2	3	2	8
Задача 3	4	2	5
Задача 4	4	3	2

Рисунок 4 – Третий шаг алгоритма Плотникова-Зверева

Далее к элементам второй строки прибавляются элементы первой строки. Во второй строке ищется минимальный элемент, в данном случае равный 3 и его номер 1 заносится в список. (рисунок 5).

	Устройство 1	Устройство 2	Устройство 3
Задача 1	0	**3**	0
Задача 2	**3**	5	8
Задача 3	4	2	5
Задача 4	4	3	2

List
2
1

Рисунок 5 – Четвертый шаг алгоритма Плотникова-Зверева

Все элементы кроме 1 во второй строке обнуляются. К третей строке прибавляются элементы второй строки. В третьей строки ищется минимальный элемент, в данном случае равный 5 и в список заносится его номер 2 (Рисунок 6).

	Устройство 1	Устройство 2	Устройство 3
Задача 1	0	**3**	0
Задача 2	**3**	3	**0**
Задача 3	7	**5**	5
Задача 4	4	3	2

List
2
1
2

Рисунок 6 – Пятый шаг алгоритма Плотникова-Зверева

Обнуляются все элементы третьей строки кроме 2. К четвертой строке прибавляются элементы третей строки. В четвертой строке ищется минимальный элемент, в данном случае равный 2 и в список заносится его номер 3 (Рисунок 7).

	Устройство 1	Устройство 2	Устройство 3
Задача 1	0	**3**	0
Задача 2	**3**	3	**0**
Задача 3	**3**	**5**	0
Задача 4	7	8	**2**

List
2
1
2
3

Рисунок 7 – Шестой шаг алгоритма Плотникова-Зверева

По итогу получаем решение, при котором появляется следующее соответствие задач устройствам обработки: задача 1 – устройство обработки 2; задача 2 – устройство обработки 1; задача 3 – устройство обработки 2; задача 4 – устройство обработки 3.

Создается 3 интервала на промежутке 0..255 (0..85, 86..170, 171..255). Для каждой задачи генерируется случайное значение из интервала с номером соответствующего устройству, на котором она должна обрабатываться. Сформированная особь таким способом показана на рисунке 8.

№ задачи	1	2	3	4
Значение гена	100	56	143	217

Рисунок 8 – Сформированная особь

Алгоритм Плотникова-Зверева с использованием квадратичного критерия.

Данный алгоритм отличается от предыдущего варианта тем что в строке выбирается не просто минимальный элемент, а считается значение критерия для каждого устройства по следующему принципу: если критерий вычисляется для j устройства, то берется его значение и возводится в квадрат, к нему прибавляются значения для остальных устройств, из предыдущей строки, возведенные в квадрат. Среди полученных значений критериев выбирается минимальный, а номер устройства, которому оно принадлежит заносится в список List.

Для примера рассмотрим задачу с 3 заданиями 3 устройствами обработки. Для начала так же, как и в предыдущем методе матрица сортируется либо по возрастанию, либо по убывания суммы элементов строк. Выполним расчет квадратичного критерия для первой строки. По полученным результатам получается, что минимальное значение критерия в первой строке было получено для 1 устройства обработки (Рисунок 9).

	Уст-во 1	Уст-во 2	Уст-во 3
Задача 1	**3**	4	5
Задача 2	5	4	9
Задача 3	5	8	6

Значение критерия		
Уст-во 1	Уст-во 2	Уст-во 3
9	16	25

List
1

Рисунок 9 – Обработка первой строки алгоритмом Плотникова-Зверева с использованием квадратичного критерия.

Далее аналогично рассчитаем квадратичный критерий для второй строки (Рисунок 10). Квадратичный критерий принимает следующие значения: Уст-во_1=8*8+0*0+0*0=64; Уст-во_2=3*3+4*4+0*0=25; Уст-во_3=3*3+0*0+9*9=90.

По полученным результатам получается, что минимальное значение критерия во второй строке было получено для 2 устройства обработки.

	Уст-во 1	Уст-во 2	Уст-во 3
Задача 1	3	0	0
Задача 2	8	**4**	9
Задача 3	5	8	6

Значение критерия		
Уст-во 1	Уст-во 2	Уст-во 3
64	**25**	90

List
1
2

Рисунок 10 – Обработка второй строки алгоритмом Плотникова-Зверева с использованием квадратичного критерия.

Рассчитаем квадратичный критерий для третьей строки (Рисунок 11). По полученным результатам получается, что минимальное значение критерия в третьей строке было получено для 3 устройства обработки.

	Уст-во 1	Уст-во 2	Уст-во 3
Задача 1	3	0	0
Задача 2	3	4	0
Задача 3	8	12	6

Значение критерия		
Уст-во 1	Уст-во 2	Уст-во 3
80	153	**61**

List
1
2
3

Рисунок 11 – Обработка третьей строки алгоритмом Плотникова-Зверева с использованием квадратичного критерия.

По итогу получаем решение, при котором появляется следующее соответствие задач устройствам обработки: задача 1 – устройство обработки 1; задача 2 – устройство обработки 2; задача 3 – устройство обработки 3.

Создается 3 интервала на промежутке 0..255 (0..85, 86..170, 171..255). Для каждой задачи генерируется случайное значение из интервала с номером, соответствующего устройству обработки. Сформированная особь таким способом показана на рисунке 12.

№ задачи	1	2	3
Значение гена	55	100	196

Рисунок 12 – Сформированная особь

Алгоритм Плотникова-Зверева с использованием кубического критерия.

Данный алгоритм отличается от варианта с использованием минимаксного критерия тем что в строке выбирается не просто минимальный элемент, а считается значение критерия для каждого устройства по следующему принципу: если критерий вычисляется для j устройства, то берется его значение и возводится в куб, к нему прибавляются значения для остальных устройств, из предыдущей строки, возведенные в куб. Среди полученных значений критериев выбирается минимальный, а номер устройства, которому оно принадлежит заносится в список List.

Для примера рассмотрим задачу с 3 заданиями 3 устройствами обработки. Для начала так же, как и в методе с использованием минимаксного критерия матрица сортируется либо по возрастанию, либо по убывания суммы элементов строк. Выполним расчет кубического критерия для первой строки. По полученным результатам получается, что минимальное значение критерия в первой строке было получено для 2 устройства обработки (Рисунок 13).

	Уст-во 1	Уст-во 2	Уст-во 3
Задача 1	4	**3**	8
Задача 2	5	6	2
Задача 3	3	2	5

Значение критерия		
Уст-во 1	Уст-во 2	Уст-во 3
64	**27**	512

List
2

Рисунок 13 – Обработка первой строки алгоритмом Плотникова-Зверева с использованием кубического критерия.

Далее аналогично рассчитаем кубический критерий для второй строки (Рисунок 14). Квадратичный критерий принимает следующие значения: Уст-во_1=$5^3+3^3+0^3$=152; Уст-во_2=$0^3+9^3+0^3$=729; Уст-во_3=$0^3+3^3+2^3$=35.

По полученным результатам получается, что минимальное значение критерия во второй строке было получено для 3 устройства обработки.

	Уст-во 1	Уст-во 2	Уст-во 3
Задача 1	0	**3**	0
Задача 2	5	9	**2**
Задача 3	3	2	5

Значение критерия		
Уст-во 1	Уст-во 2	Уст-во 3
152	729	**35**

List
3

Рисунок 14 – Обработка второй строки алгоритмом Плотникова-Зверева с использованием кубического критерия.

Рассчитаем квадратичный критерий для третьей строки (Рисунок 15). По полученным результатам получается, что минимальное значение критерия в третьей строке было получено для 3 устройства обработки.

	Уст-во 1	Уст-во 2	Уст-во 3
Задача 1	0	**3**	0
Задача 2	0	**3**	**2**
Задача 3	**3**	5	7

Значение критерия		
Уст-во 1	Уст-во 2	Уст-во 3
27+81+8=116	125+8=133	27+343=370

List
1

Рисунок 15 – Обработка третьей строки алгоритмом Плотникова-Зверева с использованием кубического критерия.

По итогу получаем решение, при котором появляется следующее соответствие задач устройствам обработки: задача 1 – устройство обработки 2; задача 2 – устройство обработки 3; задача 3 – устройство обработки 1.

Создается 3 интервала на промежутке 0..255 (0..85, 86..170, 171..255). Для каждой задачи генерируется случайное значение из интервала с номером, соответствующего устройству обработки. Сформированная особь таким способом показана на рисунке 16.

№ задачи	1	2	3
Значение гена	97	188	41

Рисунок 16 – Сформированная особь

Результаты исследования.

В рамках вычислительного эксперимента было проведена оценка эффективности работы модифицированной модели Голдберга. [8,9,10] В качестве параметров оценивания эффективности выбраны такие критерии как минимальное полученное решение, среднее значение решения и время поиска решения, так как являются наиболее важными с точки зрения рассматриваемой задачи. Для эксперимента было использована случайная генерация особей первого поколения, со следующими критериями оценки приспособленности особи:

- минимаксный критерий;
- квадратичный критерий;
- кубический критерий.

В качестве входных данных выступали времени выполнения задач на каждом из устройств обработки, которые были сформированы случайно, значениями в диапазоне от 25 до 35. В качестве оператора кроссовера использовался двухточечный кроссовер, с заданной вероятностью 100%, который показал свою эффективность в предыдущих работах.

Эксперименты проводились для n=3, 4, 5, 6 и 7 устройств обработки, количество задач было задано равное m=52, 253 и 457, а количество особей и итераций равнялось 400. Каждый эксперимент повторялся 25 раз. В ходе повторов эксперимента осуществлялся поиск лучшего решения, среднего результата и времени поиска решения. Для сравнения результатов работы генетических алгоритмов использовались решения полученные с применением алгоритма Плотникова-Зверева с минимаксным, квадратичным и кубическим критериями.

Для проведения эксперимента было написано программное средство на языке программирования высокого уровня C#. Для наглядного сравнения полученных решений между собой, случаи в которых применялся минимаксный и квадратичный критерий приспособленности особи, дополнительно пересчитывались по минимаксному критерию.

Полученные результаты эксперимента были сгруппированы в 2 таблицы в зависимости от количества рассматриваемых задач.

В таблица 1 содержатся результаты эксперимента для 253 задач.

Таблица 1

Результаты вычислительного эксперимента для 253 задач

Размерность задачи	**Критерии оценки эффективности**	**Генетический алгоритм**			**Алгоритм Плотникова-Зверева**					
		Минимаксный	**Квадратичный**	**Кубический**	**Минимаксный**	**Минимаксный по возрастанию**	**Квадратичный**	**Квадратичный по возрастанию**	**Кубический**	**Кубический по возрастанию**

3*253	мин	2325	**2318**	2594	2506	2545	2368	2377	7628	7628
	сред	2335,92	**2319,2**	2670,36						
	время	61601	**36306**	43871						
4*253	мин	1708	**1695**	1958	1918	1867	1753	1750	7623	7623
	сред	1723,44	**1695,92**	2041,68						
	время	84255	**42736**	54009						
5*253	мин	1349	**1334**	1699	1508	1476	1402	1403	7650	7650
	сред	1370,08	**1338,52**	1868,84						
	время	110235	**50139**	58519						
6*253	мин	1122	**1107**	1275	1265	1295	1163	1193	7625	7625
	сред	1139,4	**1109,2**	1570,28						
	время	149380	56759	**56428**						
7*253	мин	953	**946**	1396	1152	1136	1040	1032	7634	7634
	сред	965,92	**949,16**	1553,56						
	время	227495	**65405**	66464						

В таблица 2 содержатся результаты эксперимента для 457 задач.

Таблица 2

Результаты вычислительного эксперимента для 457 задач

Размерность задачи	Критерии оценки эффективности	Генетический алгоритм			Алгоритм Плотникова-Зверева					
		Минимаксный	Квадратичный	Кубический	Минимаксный	Минимаксный по возрастанию	Квадратичный	Квадратичный по возрастанию	Кубический	Кубический по возрастанию
3*457	мин	4156	**4137**	4635	4545	4491	4207	4202	13614	13614
	сред	4168,52	**4137**	4838,16						
	время	150732	**72600**	94767						
4*457	мин	3087	**3048**	3497	3458	3439	3194	3182	13682	13682
	сред	3102,28	**3048,76**	3694,4						
	время	237308	**91001**	92634						
5*457	мин	2464	**2419**	2881	2706	2704	2506	2497	13821	13821
	сред	2491,36	**2420,76**	3054,76						
	время	278794	110408	**105059**						
6*457	мин	2004	**1984**	2371	2231	2429	2085	2273	13750	13750
	сред	2042,04	**1988,84**	2509,04						
	время	435239	120654	**110992**						
7*457	мин	1724	**1700**	2127	1987	1938	1872	1848	13818	13818
	сред	1744,28	**1704,6**	2242						
	время	633166	138171	**117561**						

Выводы

1. Использование квадратичных критериев применительно к матрицам большой размерности как для списочного, так и для генетического алгоритма является более перспективным чем использование минимаксного критерия с точки зрения точности получаемых решений, а также временных затрат.

2. Использование кубических критериев не является оправданным с точки зрения точности получаемых решений.

Литература

1. Алексеев О.Г. Комплексное применение методов дискретной оптимизации. Москва: «Наука». 1987 г. 247 с.

2. Кобак В.Г., Жуковский А.Г., Кузин А.П. Исследование модификаций турнирного отбора при решения неоднородной минимаксной задачи модифицированной моделью Голдберга // Инженерный вестник Дона, 2018, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2018/4962.

3. Кобак, В.Г., Жуковский А.Г., Кузин А.П. Применение гибридного алгоритма при решении неоднородной минимаксной задачи с использованием сильных мутаций // Инженерный вестник Дона, 2018, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5396.

4. Кобак В.Г., Жуковский А.Г., Кузин А.П., Тхазаплижева А.Н. Подход по уменьшению времени работы модифицированной модели Голдберга при решении неоднородной минимаксной задачи // Инженерный вестник Дона, 2019, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5665.

5. Емельянов В.В., Курейчик В.В., Курейчик В. М. Теория и практика эволюционного моделирования. М: Физматлит. 2003 г. 432 с.

6. Паначенко Т.В. Генетические алгоритмы. Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет». 2007 г. 87 с.

7. Редько В.Г. Эволюционная кибернетика. М.: Наука. 2001 г. 156 с

8. Affenzeller M., Wagner S., Winkler S., Beham A. Genetic Algorithms and Genetic Programming: Modern Concepts and Practical Applications. USA: CRC Press. 2009. 364 p.

9. Гончарова А.С., Бекетова О.С., Заросило Л.Р., Авдеева М.А., Осадчук Ю.В., Кононова Н.В. Модели генетических алгоритмов // Юный ученый. 2015 г. №1. с. 32-33. URL: moluch.ru/young/archive/1/43/.

10. Goldberg D. Genetic Algorithms in search, optimization, and machine learning. USA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1989. pp. 28-33.

References

1. Alekseev O. G. Kompleksnoye primeneniye metodov diskretnoy optimizatsii [Complex application of discrete optimization methods]. Moscow: «Nauka». 1987. 247 p.

2. Kobak V.G., Zhukovskiy A.G., Kuzin A.P. Inzhenernyj vestnik Dona, 2018, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2018/4962/.

3. Kobak, V.G., Zhukovskiy A.G., Kuzin A.P. Inzhenernyj vestnik Dona, 2018, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5396/.

4. Kobak V.G., Zhukovskiy A.G., Kuzin A.P., Tkhazaplizheva A.N. Inzhenernyj vestnik Dona, 2019, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5665/.

5. Yemel'yanov V.V., Kureychik V.V., Kureychik V. M. Teoriya i praktika evolyutsionnogo modelirovaniya [Theory and practice of evolutionary modeling]. M: Fizmatlit. 2003. 432 p.

6. Panchenko T. V. Geneticheskiye algoritmy [Genetic algorithms]. Astrakhan': Izdatel'skiy dom «Astrakhanskiy universitet». 2007. 87 p.

7. Red'ko V.G. Evolyutsionnaya kibernetika [Evolutionary cybernetics]. M.: Nauka. 2001. 156 p.

8. Affenzeller M., Wagner S., Winkler S., Beham A. Genetic algorithms and genetic programming: Modern Concepts and Practical Applications. USA: CRC Press. 2009. 364 p.

9. Goncharova A.S., Beketova O.S., Zarosilo L.R., Avdeyeva M.A., Osadchuk YU.V., Kononova N.V. Yunyy uchenyy. 2015. №1. pp. 32-33. URL: moluch.ru/young/archive/1/43/.

10. Goldberg D. Genetic algorithms in search, optimization, and machine Learning. USA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1989. pp. 28-33.