Инженерный вестник Дона, №2 ч.2 (2015)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/2964

Случайные блуждания по графу-решётке и комбинаторные тождества

Я.М. Ерусалимский

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: Граф-решетка имеет вершины в точках с неотрицательными целыми координатами. Из каждой вершины выходит две дуги: горизонтальная и вертикальная в соседние вершины (правую и верхнюю). Вероятность перехода по каждой из дуг равна ½. Рассмотрены задачи о случайных блужданиях по вершинам графа, без ограничений на достижимость и с двумя видами ограничений на достижимость – смешанной и магнитной. Получены некоторые комбинаторные тождества.

Ключевые слова: ориентированный граф, случайные блуждания, вероятность перехода, достижимость вершин, треугольник Паскаля, комбинаторное тождество

1. Граф-решётка и пути на нём

Рассмотрим один бесконечный ориентированный граф, который мы будем называть граф-решетка. Множество вершин этого графа $Z_+ \times Z_+$ (Здесь Z_+ - множество неотрицательных целых чисел). Из каждой вершины $(p;q)$ выходит две дуги, одна в вершину $(p+1;q)$, другая в вершину $(p;q+1)$ (см. рис. 1). Будем считать, что длины всех дуг графа-решетки равны единице.

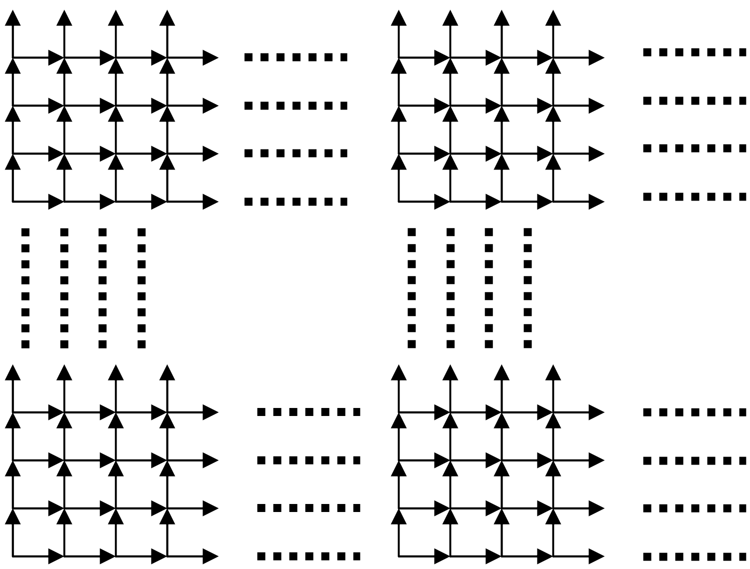

Рис. 1. Граф-решётка

Ясно, что

1. Граф-решетка не содержит контуров.
2. Все пути на этом графе простые.
3. Из вершины $x=(p;q)$ существует путь в вершину $y==(s;t)$ тогда и только тогда, когда $(p\le s)\,\&\,(q\le t)$, при этом длины всех путей равны $(s-p)+(t-q)$. Все эти пути находятся на графе-решетке в прямоугольнике с нижней левой вершиной x и правой верхней вершиной y.

Пусть $1\le m\le n$. Рассмотрим задачу о количестве путей из вершины $\overline{O}=(0;0)$ в вершину $\overline{A}=(m;n-m)$. Все пути из $\overline{O}$ в $\overline{A}$ имеют длину равную n и располагаются в соответствующем прямоугольнике. Каждые путь представляет собой ломанную, состоящую из m горизонтальных дуг и $n-m$ вертикальных дуг.

Каждый такой путь будем кодировать n- разрядным двоичным числом, содержащим m единиц и $n-m$ нулей. Единица, стоящая на i-ом месте слева, означает, что на i-ом шаге путь проходит по горизонтальной дуге, а ноль означает прохождение по вертикальной дуге. Значит количество путей, ведущих из $\overline{O}$ в $\overline{A}$, равно количеству n-разрядным двоичных чисел, содержащих m единиц, а это количество равно C_n^m.

Граф-решетка позволяет сделать наглядным доказательство тождества Паскаля, лежащего в основе построения знаменитого треугольника Паскаля (см. напр. [1]).

Возьмем $1\le m\le n$ и рассмотрим вершины решетки $\overline{O}=(0;0)$, $\overline{B}=(m;0)$, $\overline{C}=(m;n-m)$. $\overline{D}=(n-m;0)$. $\overline{E}=(m+1;0)$, $\overline{F}=(m+1;n-m)$.

Найдем количество путей, ведущих из вершины $\overline{O}$ в вершину $\overline{F}$. Как следует из предыдущего рассуждения, оно равно C_{n+1}^{m+1}. Введем в рассмотрение еще две вершины на решетке: $\overline{O}_{\rightarrow}=(1;0)$ и $\overline{O}\uparrow=(0;1)$. Множество всех путей, ведущих из вершины $\overline{O}$ в вершину $\overline{F}$, разобьем на два непересекающихся подмножества. К первому подмножеству отнесем пути, начинающиеся с вертикальной дуги, а ко второму – с горизонтальной дуги. Ясно, что первое подмножество содержит столько путей, сколько существует путей из вершины $\overline{O}\uparrow$ в вершину $\overline{F}$, т.е. C_{n}^{m+1}. Второе подмножество содержит столько путей, сколько существует путей из вершины $\overline{O}_{\rightarrow}$ в вершину $\overline{F}$, т.е C_{n}^{m}. Поэтому

$$C_{n+1}^{m+1}=C_{n}^{m}+C_{n}^{m+1}.$$

2. Граф-решётка со смешанной достижимостью

Будем теперь рассматривать граф-решётку как граф со смешанной достижимостью (см. [2-4]). Множество дуг U графа со смешанной достижимостью представляет собой объединение непересекающихся непустых множеств U_R и U_Z, а допустимыми на графе со смешанной достижимостью являются пути, которые не проходят подряд по дугам множества U_Z. Будем считать, что на графе-решетке горизонтальные дуги образуют множество U_Z, а вертикальные - U_R. Таким образом, допустимыми путями на графе-решётке со смешанной достижимостью являются пути, не содержащие никаких следующих подряд горизонтальных дуг. Другими словами, между любыми двумя соседними горизонтальными дугами пути имеется не менее одной вертикальной дуги. Ясно, что условие существования пути из вершины $x=(p;q)$ в вершину $y==(s;t)$, состоящее в выполнении неравенств $(p\le s)\,\&\,(q\le t)$ является теперь только необходимым, но не достаточным. Необходимые и достаточные условия мы получим позже.

Пусть $1 \le m \le n$. Рассмотрим задачу о количестве смешанных путей, ведущих из вершины $\overline{O} = (0;0)$ в вершину $\overline{A} = (m; n-m)$. Как и при решении задачи о количестве путей без ограничений на достижимость путь будем кодировать n-разрядным двоичным числом содержащим m единиц и $n-m$ нулей. Учитывая условие смешанной достижимости в этих числах между любыми соседними единицами должен содержаться хотя бы один ноль. Обозначим через x_1 количество нулей, стоящих перед первой единицей ($x_1 \in Z_+$), через x_2 - количество нулей, стоящих между первой и второй единицей ($x_2 \in N$), через x_3 - количество нулей, стоящих между второй и третьей единицей ($x_3 \in N$), . . ., через x_m - количество нулей, стоящих между предпоследней и последней единицей ($x_m \in N$), через x_{m+1} - количество нулей, стоящих за последней единицей ($x_{m+1} \in Z_+$). Тогда задача о подсчёте количества таких n-разрядных двоичных чисел равносильна задаче нахождения числа решений уравнения

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n - m; \\ & x_1, x_{m+1} \in Z_+, x_2, \ldots, x_m \in N \end{aligned} \tag{1}$$

Следуя [1], сделаем в (1) замену переменных $y_1 = x_1 + 1; y_2 = x_2; \ldots; y_m = x_m; y_{m+1} = x_{m+1} + 1$. Тогда задача свелась к подсчету числа решений уравнения

$$\begin{aligned} & y_1 + y_2 + \cdots + y_m + y_{m+1} = n - m + 2; \\ & y_1, y_2, \ldots, y_{m+1} \in N \end{aligned} \tag{2}$$

Эта задача (см. [1]) называется задачей на сочетания с повторениями, а количество решений этого уравнения равно C_{n-m+1}^{m}, при этом должно выполняться неравенство $m \le n - m + 1$. Перейдем в последнем к равносильному неравенству $m \le \frac{n+1}{2}$. (В противном случае не хватает нулей, чтобы проредить единицы.) Последнее неравенство можно получить и из других соображений. Действительно, m единиц можно «проредить» поставив в каждый промежуток между ними не менее одного нуля. Значит, нулей должно быть не менее чем $m-1$, поэтому разрядность двоичного числа, содержащего m «прореженных» единиц должна быть не меньшей чем $m+(m-1)=2m-1$, т.е. $n \ge 2m-1$.

Вернемся теперь к вопросу о смешанной достижимости вершины $y=(s;t)$ из вершины $x=(p;q)$. В этом случае $m=s-p$, $n=(s-p)+(t-q)$. Значит должно выполняться неравенство $2(s-p)-1 \le (s-p)+(t-q)$, которое равносильно неравенству $(s-p)-1 \le (t-q)$. Таким образом, доказано

Утверждение 1. Вершина $y=(s;t)$ смешанно достижима из вершины $x=(p;q)$ на графе-решётке тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия

$$(s-p) \ge 0 \,\&\, (t-p) \ge 0 \,\&\, (s-p)-1 \le (t-q). \tag{3}$$

На рис. 2 представлено множество вершин смешанно достижимых из вершины $\overline{O}$. Это вершины находящиеся на прямой $y=x-1$ и выше этой прямой.

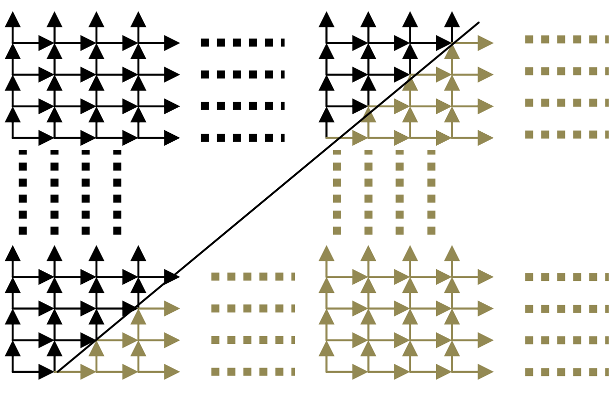

Рис. 2. Множество смешанно достижимых вершин

на графе-решетке из вершины (0;0)

Перейдём теперь к задаче о случайных блужданиях частицы по вершинам графа-решётки. Рассмотрим случай, когда частица в начальный момент находится в вершине $\overline{O}=(0;0)$. Будем считать, что вероятности перехода по всем дугам равны между собой и, значит, равны $1/2$. Решим задачу о вероятности попадания из вершины $\overline{O}=(0;0)$ в вершины графа-решётки за 4 шага. Через 4 шага частица окажется в одной из вершин, длина пути до которой из вершины $\overline{O}=(0;0)$ равна 4. На рис.3 эти вершины обозначены « ⚬»

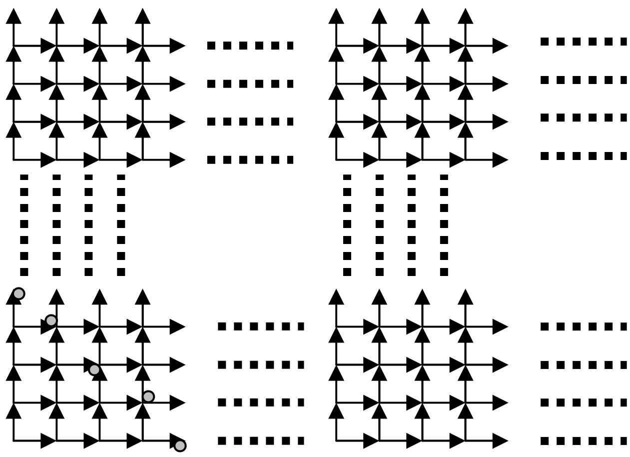

Рис. 3.

Вероятность прохождения частицы по любому из путей длины 4 равна $\left(1/2\right)^4=\frac{1}{16}$. Будем считать, что вершины, помеченные «⚬», занумерованы слева направо: I, II, III, IV, V. Согласно нашему решению задачи о количестве путей на графе-решётке получаем, что в вершины I и V ведет по одному пути, в вершины II и IV по 4 пути, а в вершину III ведёт 6 путей. Поэтому вероятность попадания из $\overline{O}$ в вершину I за четыре шага равна

$p_4(\overline{O},I)=\frac{1}{16}$, $p_4(\overline{O},II)=\frac{4}{16}=\frac{1}{8}$, $p_4(\overline{O},III)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$, $p_4(\overline{O},IV)=\frac{4}{16}=\frac{1}{8}$, $p_4(\overline{O},V)=\frac{1}{16}$.

Можно сформулировать и общее утверждение.

Утверждение 2. В процессе случайного блуждания по графу-решетке, частица, вышедшая из вершины $\overline{O}$, окажется через n шагов в одной из вершин $(m;n-m)$ $(0\le m\le n)$, при этом

$$p(\overline{O};(m;n-m))=\frac{C_n^m}{2^n}. \tag{4}$$

Вершины $(m;n-m)$ $(0\le m\le n)$ графа-решётки расположены на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника с вершинами в точках $\overline{O}$; $(0;n)$; $(n;0)$.

Посмотрим, что будет с процессом случайного блуждания в случае смешанной достижимости, когда запрещено проходить по двум горизонтальным дугам подряд. Как известно ([2, 5]), в этом случае процесс случайного блуждания не является Марковским процессом. Вершины, обозначенные нами V и IV, станут недостижимыми (нарушаются условия, сформулированные в утверждении 1). Пути перестают быть равновероятными. В вершину III ведут смешанные пути (1010), (0101) и (1001). Вероятность прохождения по первому из них равна $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$, по второму и третьему - $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. В вершину II ведут смешанные пути (1000), (0100), (0010), (0001). Вероятность прохождения по первому, второму и третьему равна $\frac{1}{8}$, а по четвертому пути она равна $\frac{1}{16}$. В вершину I ведёт один смешанный путь - (0000). Вероятность прохождения по нему равна $\frac{1}{16}$.

Мы получили, что в этом случае $p(\overline{O},I) = 1/16$, $p(\overline{O},II) = 3/8 + 1/16 = 7/16$, $p(\overline{O},III) = 1/4 + 1/8 + 1/8 = 4/8 = 1/2$.

3. Граф-решётка с магнитной достижимостью

Рассмотрим задачу о случайных блужданиях по графу-решетке с условием неубывающей магнитности (см.[2]). Что это означает? Допустимыми на графе с магнитной достижимостью являются пути, удовлетворяющие следующему условию: если i-ому шагу путь прошел через k дуг из множества магнитных дуг и среди дуг выходящих из конечной вершины i-ой дуги есть магнитные дуги, то $i+1$-я дуга должна быть магнитной. Величина k называется уровнем магнитности. Магнитными дугами на графе решётке будем считать вертикальные дуги, а уровень магнитности $k = 3$.

Рассмотрим задачу о вероятности попадания из вершины (0;0) в вершины решетки за пять шагов по магнитным путям.

Количество магнитных путей, ведущих в вершину (5;0), равно 1 (C_5^0), а вероятность прохождения по этому пути равна $(1/2)^5$. Вероятность попадания в вершину (5;0) равна $(1/2)^5$.

Количество магнитных путей, ведущих в вершину (4;1), равно C_5^1, а вероятность прохождения по каждому из них равна $(1/2)^5$. Вероятность попадания в вершину (4;1) равна $C_5^1 \cdot \left(1/2\right)^5$.

Количество магнитных путей, ведущих в вершину (3;2), равно C_5^2, а вероятность прохождения по каждому из них равна $(1/2)^5$. Вероятность попадания в вершину (3;2) равна $C_5^2 \cdot \left(1/2\right)^5$.

Количество магнитных путей, ведущих в вершину (2;3), равно C_4^2, а вероятность прохождения по каждому из них равна $({}^1\!/_2)^5$. Вероятность попадания в вершину (2;3) равна $C_4^2 \cdot ({}^1\!/_2)^5$.

Количество магнитных путей, ведущих в вершину (1;4), равно C_3^2, а вероятность прохождения по каждому из них равна $({}^1\!/_2)^4$. Вероятность попадания в вершину (1;4) равна $C_3^2 \cdot ({}^1\!/_2)^4$.

Количество магнитных путей, ведущих в вершину (0;5), равно $1 = C_2^2$, а вероятность прохождения по этому пути равна $({}^1\!/_2)^3$. Вероятность попадания в вершину (0;5) равна $({}^1\!/_2)^3$.

Вероятности попадания из вершины (0;0) за n шагов при уровне магнитности $k = 3$ в точки находящиеся на расстоянии равном n: $(n;0),(n-1;1),(n-2,2),(n-3;3),(n-4;4),\ldots,(2;n-2),(1;n-1),(0;n)$ таковы:

$$C_n^0 \cdot ({}^1\!/_2)^n; C_n^1 \cdot ({}^1\!/_2)^n; C_n^2 \cdot ({}^1\!/_2)^n; C_{n-1}^2 \cdot ({}^1\!/_2)^n; C_{n-2}^2 \cdot ({}^1\!/_2)^{n-1}; C_{n-3}^2 \cdot ({}^1\!/_2)^{n-2};\ldots;$$
$$C_2^2 \cdot ({}^1\!/_2)^3$$

Учитывая, что полная вероятность попасть из вершины (0;0) в какую-нибудь из этих вершин равна 1, мы получаем тождество:

$$\begin{gathered} C_n^0 \cdot ({}^1\!/_2)^n + C_n^1 \cdot ({}^1\!/_2)^n + C_n^2 \cdot ({}^1\!/_2)^n + C_{n-1}^2 \cdot ({}^1\!/_2)^n + C_{n-2}^2 \cdot ({}^1\!/_2)^{n-1} + \\ + C_{n-3}^2 \cdot ({}^1\!/_2)^{n-2} + \ldots + C_2^2 \cdot ({}^1\!/_2)^3 = 1 \end{gathered} \quad (3)$$

Приводя (3) к целому виду, получаем:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_{n-1}^2(2)^0 + C_{n-2}^2 \cdot (2) + C_{n-3}^2 \cdot (2)^2 + \ldots + C_2^2 \cdot (2)^{n-3} = (2)^n.$$

Ясно, что для уровня магнитности $0 < k < n$ получается тождество:

$$C_n^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_n^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots + C_n^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_{n-1}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n + C_{n-2}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} +$$
$$+ C_{n-3}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \dots + C_{k-1}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 \quad . (4)$$

Тождество (4) можно привести к виду:

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{k-1} + C_{n-1}^{k-1}(2)^0 + C_{n-2}^{k-1}(2)^1 + C_{n-3}^{k-1}(2)^{n-k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1}(2)^{n-k} = (2)^n$$

Заключение

Ориентированные графы и сети являются надежным инструментом, используемым при решении различных прикладных задач (см. напр. [6-9]). В настоящей работе мы продемонстрировали, как рассмотрение конкретной задачи о случайных блужданиях по вершинам графа позволяет получать (доказывать) комбинаторные тождества (см. [10]).

Литература

1. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения // 9-е изд., перераб. и доп. – М.: Вузовская книга, 2008. 288 с.

2. Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А., Кузьминова М.В., Петросян А.Г. Графы с нестандартной достижимостью. Задачи, приложения / Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009.195 с.

3. Ерусалимский Я.М. Графы с затуханием на дугах и усилением в вершинах и маршрутизация в информационных сетях // Инженерный вестник Дона, 2015, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2015/2782.

4. Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А. Общий подход к нестандартной достижимости на ориентированных графах//Известия вузов. Сев.-Кав. регион. Ест. науки, спец. выпуск «Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики», 2005. С. 64 -67.

5. Ерусалимский Я.М., Петросян А.Г.Случайные процессы в сетях с биполярной магнитностью// Известия вузов. Сев.-Кав. Регион. Ест. науки, приложения, 2005, №11. С.10-16

6. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях // М.: Мир, 1966. 276 с.

7. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход //М.: Мир, 1978. 432 с.

8. А.В. Боженюк, Е.М. Герасименко Разработка алгоритма нахождения максимального потока минимальной стоимости в нечеткой динамической транспортной сети // Инженерный вестник Дона, 2013, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583.

9. Grady L., Polimeni J. Discrete Calculus: Applied analysis on Graphs for Computational Science// Springer Publishing Company, Inc., NY, 2010. 366 p.

10. Riordan J. An Introduction to combinatorial analysis//New York: John Wiley & Sons, Inc., London-Chapman & Hall, Limited, 1958. 244 p.

References

1. Erusalimskiy I.M. Diskretnaja matematika: teorija, zadachi, prilozhenija [Discrete mathematics: theory, problems, applications] M.: Vuzovskaja kniga, 2008. 288 p.

2. Erusalimskiy I.M., Skorohodov V.A., Kuz'minova M.V., Petrosjan A.G. Grafy s nestandartnoj dostizhimost'ju. Zadachi, prilozhenija [Graphs with non-standart approachability. Problems, applications] Rostov-na-Donu: Juzhnyj federal'nyj universitet, 2009.195 p.

3. Erusalimskij Ja.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2015/2782.

4. Erusalimskij Ja.M., Skorohodov V.A. Izvestija vuzov. Sev.-Kav. region. Est. nauki, spec. vypusk «Psevdodifferencial'nye uravnenija i nekotorye problemy matematicheskoj fiziki», 2005. P. 64 -67.

5. Erusalimskij Ja.M., Petrosjan A.G. Izvestija vuzov. Sev.-Kav. Region. Est. nauki, prilozhenija, 2005, №11. P.10-16.

6. Ford L.R., Fulkerson D.R. Flows in Networks -Princeton Univ. Press, 1962.

7. Christofides N. Graph Theory. Algorithmic Approach. Academic Press Inc., 1975. 415 p.

8. Bozhenjuk A.V., Gerasimenko E.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583.

9. Grady L., Polimeni J. Discrete Calculus: Applied analysis on Graphs for Computational Science. Springer Publishing Company, Inc., NY. 2010. 366 p.

10. Riordan J. An Introduction to combinatorial analysis.-New York-John Wiley & Sons, Inc. London-Chapman & Hall, Limited. 1958. 244 p.