Оценка вероятностных параметров прогибов и усилий в железобетонной балке со случайными характеристиками, лежащей на статистически неоднородной полуплоскости

П.Д. Деминов

Национальный исследовательский Московский Государственный Строительный Университет, г. Москва

Аннотация: В статье рассмотрена работа железобетонной балки, лежащей на упругой полуплоскости. Прочность бетона рассматривается как случайная величина, при этом начальный модуль упругости бетона и, соответственно, начальная жесткость балки принимаются функциями случайной кубиковой прочности бетона. Основание балки рассматривается как упругая стохастически неоднородная полуплоскость. Применяя метод канонических разложений случайных функций, получены вероятностные параметры плотностей распределения вероятностей прогибов балки, а также изгибающих моментов и поперечных сил в железобетонной балке, которые являются нестационарными случайными функциями. Это позволяет в дальнейшем определить вероятность наступления предельных состояний в железобетонной балке.
Ключевые слова: железобетонная балка, начальная жесткость, кубиковая прочность, неоднородная полуплоскость, плотность распределения, прогиб балки, случайная функция.

Основные факторы, влияющие на работу строительных конструкций, в том числе на фундаментные конструкции, имеют вероятностную природу. Факторы, влияющие на перемещения и усилия в железобетонных фундаментных балках, можно разделить на три группы. К первой группе относятся грунты основания, которые обладают явно выраженными случайными свойствами [1]. Прочностные и деформационные характеристики бетона и арматуры составляют вторую группу параметров [2]. К третьей группе относятся вероятностные параметры нагрузок.

В работе [3] рассматривается работа железобетонной балки, лежащей на стохастическом основании, свойства которые описываются моделью Винклера-Фусса. Работа [4] посвящена расчёту железобетонной балки со случайными параметрами, лежащей на статистически неоднородном основании с двумя коэффициентами постели В.З.Власова-П.Л.Пастернака. Коэффициенты постели в вышеуказанных моделях упругого основания являются характеристиками, которые вычисляются косвенным путем, так как по результатам геологических изысканий определяются модуль деформации и коэффициент Пуассона грунта. Поэтому целесообразно рассмотреть работу фундаментных балок со случайными параметрами, лежащей на статистически неоднородном основании типа упругой полуплоскости.

Рассмотрим работу железобетонной балки в стадии без нормальных трещин. Начальная жесткость B_0 которой принимается случайной величиной, являющейся функцией случайной кубиковой прочности бетона R. Кубиковая прочность бетона принимается случайной нормально распределённой величиной со средним значением $\langle R \rangle$ и дисперсией D_R.

Начальная жёсткость балки B_0 принимается равной [5]:

$$B_0(R) = 0{,}85\, I_{red}(R) E_b(R). \tag{1}$$

Приведенный момент инерции I_{red} в (1) принимается равным:

$$I_{red}(R) = I_b + \frac{E_s}{E_b(R)} I_s,$$

где I_b и I_s моменты инерции бетонной и арматурной частей сечения балки, соответственно, а E_s и $E_b(R)$ – модуль упругости арматуры и начальный модуль упругости бетона, при этом E_s принимается детерминированной величиной, ввиду значительно меньшей изменчивости по сравнению с $E_b(R)$.

Математическое ожидание и дисперсия модуля деформации бетона, если воспользоваться, например, формулой А.А. Гвоздева, запишем после линеаризации в районе математического ожидания $\langle R \rangle$ в виде (МПа):

$$\langle E_b \rangle = \frac{520\,00\, \langle R \rangle}{23 + \langle R \rangle}; \qquad D_{E_b} = \left[\frac{520\,00 \cdot 23}{(23 + \langle R \rangle)^2}\right]^2 \mathrm{D_R}\,.$$

Приведённый момент инерции балки будем считать неслучайной величиной, вычисленной при $R = \langle R \rangle$.

Тогда вероятностные характеристики нормального распределения начальной жесткости балки будут иметь вид:

$$< B_0(R) > = 0{,}85\, I_{red} \frac{520\,00\, \langle R \rangle}{23 + \langle R \rangle}; \;\; D_{B_0} = (0{,}85\, I_{red})^2 \left[\frac{520\,00 \cdot 23}{(23 + \langle R \rangle)^2}\right]^2 D_R. \quad (2)$$

Модуль упругости полуплоскости $E_{\text{гр.}}$ в общем случае представляет собой случайную функцию координат x и y, т.е. $\tilde{E}_{\text{гр.}} = \tilde{E}_{\text{гр.}}(x, y)$.

Для упрощения дальнейших выкладок введём функцию $\widetilde{K}_{\text{гр.}}(x, y)$ обратную модулю упругости полуплоскости:

$$\widetilde{K}_{\text{гр.}}(x, y) = \frac{1}{\tilde{E}_{\text{гр.}}(x, y)}.$$

Для случайной функции $\widetilde{K}_{\text{гр}}(x, y)$, изменяющейся одновременно по горизонтальной координате x и по глубине y, можно записать следующее равенство:

$$\widetilde{K}_{\text{гр.}}(x, y) = \langle K_{\text{гр.}}(x, y) \rangle + \widetilde{K}^*_{\text{гр.}}(x, y),$$

где $\langle K_{\text{гр.}}(x, y) \rangle$ – математическое ожидание случайной функции $\widetilde{K}_{\text{гр.}}(x, y)$;

$\widetilde{K}^*_{\text{гр.}}(x, y)$ – центрированная случайная составляющая функции $\widetilde{K}_{\text{гр.}}(x, y)$.

В том случае, когда $\widetilde{K}_{\text{гр.}}(x, y)$ является стационарной случайной функцией, то её математическое ожидание $\langle K_{\text{гр.}}(x, y) \rangle$ будет постоянной величиной и корреляционная функция случайной функции $\widetilde{K}^*_{\text{гр.}}(x, y)$ будет зависеть только от разности координат.

Решение общей задачи о напряженно-деформированном состоянии стохастической упругой полуплоскости с нестационарным случайным двумерным модулем упругости представляет значительные математические трудности. Поэтому разные исследователи упрощали данную задачу разными способами. В работе [6] модуль упругости описывается стационарным случайным полем. В работе [7] для упрощения расчётов модуль упругости полуплоскости принимается стационарной случайной функцией координаты

x. В исследовании [8] $\tilde{E}_{\text{гр.}}$ принимается стационарной случайной функцией координаты y. Мы же воспользуемся подходом, который предложен в работе [9], где модуль упругости полуплоскости принимается квазистационарной случайной функцией глубины.

Рассмотрим сначала случай конкретной реализации случайной кубиковой прочности бетона R.

Пусть модуль упругости полуплоскости $\tilde{E}_{\text{гр.}}$ будет нормально распределённой квазистационарной случайной функцией координаты y. Представим модуль упругости полуплоскости в виде:

$$\tilde{E}_{\text{гр.}}(y) = \langle E_{\text{гр.}}(y) \rangle + \tilde{E}^{*}_{\text{гр.}}(y).$$

Среднее значение модуля упругости полуплоскости $\langle E_{\text{гр.}}(y) \rangle$ будем аппроксимировать экспоненциальной функцией:

$$\langle E_{\text{гр.}}(y) \rangle = \frac{1}{a_0} exp\,(\alpha y). \qquad (3)$$

Введём для удобства выкладок функцию, обратную модулю упругости полуплоскости, и представим её в виде суммы среднего значения $\langle K_{\text{гр.}}(y) \rangle$ и центрированной случайной части $\tilde{K}^{*}{}_{\text{гр.}}(y)$

$$\tilde{K}_{\text{гр.}}(y) = \langle K_{\text{гр.}}(y) \rangle + \tilde{K}^{*}{}_{\text{гр.}}(y).$$

Среднее значение функции обратной модулю упругости грунта будет иметь вид:

$$\langle K_{\text{гр.}}(y) \rangle = \frac{1}{\langle E_{\text{гр.}}(y) \rangle} = a_0 \exp(-\alpha y).$$

Выбор функции вида (3) позволяет перейти от дифференциального уравнения с переменными коэффициентами к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами и при этом хорошо аппроксимирует функцию модуля деформации грунта. Параметр α может быть любим вещественным числом, а коэффициент a_0 может быть любым неотрицательным числом. Коэффициент Пуассона $\mu_{\text{гр.}}$ полуплоскости принимаем неслучайной величиной.

Центрированную случайную составляющую $\tilde{K}^*{}_{\text{гр.}}(y)$ функции $\tilde{K}_{\text{гр.}}(y)$ представим каноническим разложением [10]:

$$\tilde{K}^*{}_{\text{гр.}}(y) = \sum_{k=0}^{\infty}[U_k \cos(\omega_k\, y) + V_k \sin(\omega_k\, y)],$$

где частота $\omega_k = \dfrac{k\,\pi}{2\,H_0}$, $\quad k = 1, 2, 3, \dots;$

$2\,H_0$ – глубина, на которой можно пренебречь напряжениями в полуплоскости;

U_k и V_k – коэффициенты канонического разложения, которые являются некоррелированными гауссовыми центрированными случайными величинами.

Дисперсии D_k коэффициентов U_k и V_k будут равны:

$$D_k = D_{U_k} = D_{V_k} = \frac{\pi}{H_0} S(\omega_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad D_0 = \frac{\pi}{2\,H_0}\, S(0),$$

где $S(\omega_k)$ – спектральная плотность случайной функции $\tilde{K}^*{}_{\text{гр.}}(y)$.

Решая уравнение неразрывности деформаций в напряжениях [11], которое описывает напряженное состояние полуплоскости, и используя подход, предложенный в [12], обобщая его на случайные функции при загружении балки неслучайной сосредоточенной силой $P = 1$, приложенной в точке $x = 0$, получаем выражение для упругой линии балки, лежащей на полуплоскости [9]:

$$\tilde{w}(x, R) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\tilde{h}(n)\, cos\, nx\, dn}{1 + \tilde{h}(n)\, n^4\, B(R)}, \tag{4}$$

здесь параметр $\tilde{h}(n)$ равен:

$$\tilde{h}(n) = \langle h(n) \rangle + \tilde{h}^*(n),$$

где $\tilde{h}^*(n)$ – центрированная случайная часть параметра $\tilde{h}(n)$;

$\langle h(n) \rangle$ – среднее значение параметра $\tilde{h}(n)$, равное:

$$\langle h(n) \rangle = \frac{a_0 \ (2m + \alpha)\, n^2 - \ \mu_{\text{гр.}}\, a_0\, \alpha \ (m^2 + \ \beta^2)}{n^2[(m + \ \alpha)^2 + \ \beta^2]}, \tag{5}$$

В формуле (5) обозначено:

$$m = n + 0{,}1 - \alpha/2 + \frac{(\mu_{\text{гр.}}\, \alpha)^2}{n};$$

$$\beta = \frac{\alpha \ (1 + \ \mu_{\text{гр.}})^{1/2}}{2}.$$

Центрированная составляющая $\tilde{h}^*(n)$ параметра $\tilde{h}(n)$ будет иметь вид:

$$\tilde{h}^*(n) = \sum_{k=0}^{\infty} [U_k\ \Phi_k(n) + \ V_k\ \Omega_k(n)],$$

где коэффициенты Φ_k и Ω_k являются функциями параметров $a_0, \alpha, \mu_{\text{гр.}}, n$.

Линеаризация выражения (4) позволяет выделить математическое ожидание прогибов балки, лежащей на упругой полуплоскости:

$$\langle\, w(x,R) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\langle\, h(n) \rangle\, cos\ nx\ dn}{1 + \ \langle\, h(n) \rangle\, n^4\ B_0(R)} \tag{6}$$

и центрированную случайную составляющую прогибов балки:

$$\widetilde{w}^*(x,R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{h}^*(n) \cos nx\ dn}{1 + \langle h(n) \rangle\, n^4\ B_0(R)} - \frac{B_0(R)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{h}^*(n)\ \langle h(n) \rangle \cos nx\ dx}{[1 + \langle h(n) \rangle\, n^4\ B_0(R)]}.$$

При этом дисперсия прогибов балки будет равна:

$$D_w(x,R) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} D_k \left[\left(\int_0^{\infty} \frac{\Phi_k(n)\ cos\ nx\ dn}{1 + \ \langle\, h(n) \rangle\, n^4\ B_0(R)} - \right.\right.$$

$$\left.- B_0(R) \int_0^{\infty} \frac{\Phi_k(n)\ \langle\, h(n) \rangle\ cos\ nx\ dn}{[1 + \ \langle\, h(n) \rangle\, n^4\ B_0(R)]^2} \right)^2 +$$

$$+\left(\int_0^\infty \frac{\Omega_k(n)\cos nx\,dn}{1+\langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)} - B_0(R)\int_0^\infty \frac{\Omega_k(n)\langle h(n)\rangle \cos nx\,dn}{[1+\langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)]^2}\right)^2\Bigg]. \qquad (7)$$

Дифференцируя выражения (6) и (7), получаем математическое ожидание и дисперсию изгибающих моментов в балке на упругой полуплоскости:

$$\langle M(x,R)\rangle = \frac{B_0(R)}{\pi}\int_0^\infty \frac{n^2\langle h(n)\rangle \cos nx\,dn}{1+\langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)}; \qquad (8)$$

$$D_M(x,R) = \frac{B_0{}^2(R)}{\pi^2}\sum_{k=0}^\infty D_k\Bigg[\left(\int_0^\infty \frac{n^2\Phi_k(n)\cos nx\,dn}{1+\langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)} -\right.$$

$$\left. - B_0(R)\int_0^\infty \frac{n^2\Phi_k(n)\langle h(n)\rangle \cos nx\,dn}{[1+\langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)]^2}\right)^2 +$$

$$+\left(\int_0^\infty \frac{n^2\Omega_k(n)\cos nx\,dn}{1+\langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)} - B_0(R)\int_0^\infty \frac{n^2\Omega_k(n)\langle h(n)\rangle \cos nx\,dn}{[1+\langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)]^2}\right)^2\Bigg]. \qquad (9)$$

Дифференцируя выражения (8) и (9) получаем математическое ожидание и дисперсию поперечных сил в балке на упругой полуплоскости:

$$\langle Q(x,R)\rangle = \frac{B(R)}{2\pi}\int_0^\infty \frac{n^3\langle h(n)\rangle \sin nx\,dn}{1+\langle h(n)\rangle n^4 B(R)};$$

$$D_Q(x,R) = \frac{B_0{}^2(R)}{\pi^2}\sum_{k=0}^\infty D_k\Bigg[\left(\int_0^\infty \frac{n^3\Phi_k(n)\sin nx\,dn}{1+\langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)} -\right.$$

$$\left. - B(R)\int_0^\infty \frac{n^3\,\Phi_k(n)\langle h(n)\rangle \sin nx\,dn}{[1+\langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)]^2}\right)^2 +$$

$$+\left(\int_0^\infty \frac{n^3\Omega_k(n)\, sin\, nx\, dn}{1+\langle\, h(n)\rangle\, n^4\, B_0(R)} - B(R)\int_0^\infty \frac{n^3\Omega_k(n)\,\langle\, h(n)\rangle\, sin\, nx\, dn}{[1+\langle\, h(n)\rangle\, n^4\, B_0(R)]^2}\right)^2\Bigg].$$

Полученные перемещения и усилия в балке на упругом основании относятся к случаю, когда балка загружена неслучайной силой $P=1$, приложенной в начале координат. Выходной случайный процесс является нестационарным, так как и математическое ожидание и дисперсия являются функциями координаты x.

Полученные результаты можно обобщить, применяя принцип суперпозиции, на случай загружения балки системой N неслучайных сосредоточенных сил P_j, приложенных к балке с шагом l.

Кроме того, приведённые выше формулы для прогибов и усилий в железобетонной балке, лежащей на упругой стохастической полуплоскости, были получены при условии, что кубиковая прочность бетона и, следовательно, начальная жесткость балки получили конкретную реализацию. Но так как жесткость железобетонной балки принимается нами как случайная величина с параметрами распределения (2) и которая является функцией случайной кубиковой прочности бетона с нормальным распределением вида:

$$p_R(R)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_R}}exp\left[-\frac{(R-\langle R\rangle)^2}{2\, D_R}\right]$$

с параметрами $\langle R\rangle$ и D_R, то для прогибов и усилий в балке будем иметь следующие выражения:

для математического ожидания и дисперсии прогибов балки получаем:

$$\langle\, w(x)\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p_R(R)\sum_{j=0}^{N}\left(P_j\int_0^\infty \frac{\langle\, h(n)\rangle\cos\,[n(x-jl)]\, dn}{1+\langle\, h(n)\rangle\, n^4\, B_0(R)}\right) dR;$$

$$D_w(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} p_R(R) \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{\infty} D_k \left[\left(\int_0^{\infty} \frac{\Phi_k(n) cos[n(x - jl)]dn}{1 + \langle h(n) \rangle n^4 B_0(R)} - \right.\right.$$

$$\left. - B_0(R) \int_0^{\infty} \frac{\Phi_k(n)\langle h(n)\rangle cos[n(x - jl)]dn}{[1 + \langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)]^2} \right)^2 +$$

$$+ \left(\int_0^{\infty} \frac{\Omega_k(n)\, cos\, [n(x - jl)]\, dn}{1 + \langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)} - \right.$$

$$\left.\left. - B_0(R) \int_0^{\infty} \frac{\Omega_k(n)\, \langle h(n)\rangle\, cos\, [(n(x - jl)]\, dn}{[1 + \langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)]^2} \right)^2 \right] dR;$$

для математического ожидания и дисперсии изгибающих моментов в балке получаем:

$$\langle M(x)\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_R(R)\, B_0(R) \sum_{j=0}^{N} \left(P_j \int_0^{\infty} \frac{n^2 \langle h(n)\rangle \cos[n(x - jl)]\, dn}{1 + \langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)} \right) dR;$$

$$D_M(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} p_R(R)\ {B_0}^2(R) \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{\infty} D_k \left[\left(\int_0^{\infty} \frac{n^2 \Phi_k(n)\, cos[n(x - jl)]\, dn}{1 + \langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)} - \right.\right.$$

$$\left. - B_0(R) \int_0^{\infty} \frac{n^2 \Phi_k(n)\, \langle h(n)\rangle\, cos[n(x - jl)]\, dn}{[1 + \langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)]^2} \right)^2 +$$

$$+ \left(\int_0^{\infty} \frac{n^2 \Omega_k(n)\, cos[n(x - jl)]\, dn}{1 + \langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)} - \right.$$

$$\left.\left. - B_0(R) \int_0^{\infty} \frac{n^2 \Omega_k(n)\, \langle h(n)\rangle\, cos\, [n(x - jl)]\, dn}{[1 + \langle h(n)\rangle n^4 B_0(R)]^2} \right)^2 \right] dR;$$

для математического ожидания и дисперсии поперечной силы в балке получаем:

$$\langle\, Q(x)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p_R(R)\, B_0(R)\sum_{j=0}^{N}\left(sgn(x-jl))\; P_j \int_0^{\infty}\frac{n^3\langle\, h(n)\rangle \sin[n(x-jl)]\, dn}{1+\,\langle\, h(n)\rangle\, n^4\, B_0(R)}\right),$$

$x \geq\ 0.$ здесь $sgn(z)$ – сигнум-функция Кронекера [13].

$$D_Q(x)\ = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} p_R(R)\, {B_0}^2(R)\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} D_k\left[\left(\int_0^{\infty}\frac{n^3\Phi_k(n)\,\sin\,[n(x-jl)]\, dn}{1+\,\langle\, h(n)\rangle\, n^4\, B_0(R)}\,-\right.\right.$$

$$\left. -\ B_0(R)\int_0^{\infty}\frac{n^3\,\Phi_k(n)\,\langle\, h(n)\rangle \sin\,[n(x-jl)]\, dn}{[1+\,\langle\, h(n)\rangle\, n^4\, B_0(R)]^2}\right)^2 +$$

$$+\left(\int_0^{\infty}\frac{n^3\Omega_k(n)\, cos[n(x-jl)]\, dn}{1+\,\langle\, h(n)\rangle\, n^4\, B_0(R)} -\right.$$

$$\left.\left. -\, B_0(R)\int_0^{\infty}\frac{n^3\Omega_k(n)\,\langle\, h(n)\rangle\, cos\,[n(x-jl)]\, dn}{[1+\,\langle\, h(n)\rangle\, n^4\, B_0(R)]^2}\right)^2\right] dR.$$

Заключение

Получены выражения для вероятностных характеристик плотностей распределения вероятностей прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил в железобетонной балке, лежащей на стохастически неоднородном основании, свойства которого описываются моделью упругой полуплоскости. При этом жесткость балки рассматривается как случайная величина, зависящая от случайной кубиковой прочности бетона. Выходные случайные процессы являются нестационарными случайными функциями. Знание прогибов и усилий позволяет в дальнейшем определить вероятность наступления предельных состояний в железобетонной балке.

Литература

1. Кудрявцев Е.П., Новожилов А.В., Судакова Н.И. Статистическое исследование деформационных свойств песчаных оснований // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1967, № 6, С.10-14.

2. Косенко Е.Е. Косенко В.В., Черпаков А.В. К вопросу о влиянии геометрических размеров на прочностные характеристики арматурных сталей // Инженерный вестник Дона, 2010, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2010/318.

3. Deminov H.D., Danilkiv A.O. Evaluation of the reliability of reinforced concrete beams on a stochastically inhomogeneous elastic foundation under the action of a non-stationary random load. The XXII International Scientific Conference «Construction the Formation of Living Environment» (FORM 2019), Tashkent, 18-21 апреля 2019, URL: doi.org/10.1051/e3sconf/20199704052.

4. Дёминов П.Д. Оценка вероятности разрушения железобетонной балки лежащей на стохастическом упругом основании с двумя коэффициентами податливости, по наклонному сечению от поперечной силы // Строительство и реконструкция. 2021, № 1 (93). С.16-25.

5. Дёминов П.Д. Оценка вероятности образования запредельных прогибов после образования трещин в железобетонной балке на стохастическом основании // Строительство и реконструкция. 2022, № 1 (99). С.3-10.

6. Насонкин В.Д., Соболев Д.Н. О распределении напряжений в статистически неоднородной полуплоскости // Проблемы надежности в строительной механике: Материалы ко Второй Всесоюз. конференции по проблемам надежности в строит. механике (Вильнюс, июнь 1968 г.). Вильнюс: 1968. С. 148-150.

7. Насонкин В.Д. О распределении напряжений в статистически неоднородной упругой полуплоскости // Строительная механика и расчёт сооружений. 1968, № 1, С. 20-23.

8. Юсупов А.К. Напряженное состояние статистически неоднородной линейно-упругой полуплоскости // Строительная механика и расчёт сооружений. 1969, № 5. С. 32-34.

9. Юсупов А.К. Распределение напряжений в упругой полуплоскости с квазистационарным по глубине модулем упругости // Строительная механика и расчёт сооружений. 1971, № 1. С. 26-31.

10. Пугачёв В.С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. М.: Физматиздат, 1960, С.248-303.

11. Михлин С.Г. Плоская задача теории упругости. // Труды Сейсмологического института АН СССР, № 65. Ленинград: Изд-во Акад. наук СССР, 1935. 83 с.

12. Teodorescu P. P., Predeleanu M. Über das ebene Problem nichthomogener elastischer Körper // Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1959. T. 27. Pp. 349-369.

13. Bracewell, R. The Sign Function, In The Fourier Transform and Its Applications, 3rd ed., New York: McGraw-Hill, 1999. Pp.61-62.

References

1. Kudryavcev E.P., Novozhilov A.V., Sudakova N.I. Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov. 1967, № 6, pp.10-14.

2. Kosenko E.E. Kosenko V.V., Cherpakov A.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2010, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5150.

3. Deminov H.D., Danilkiv A.O. Evaluation of the reliability of reinforced concrete beams on a /stochastically inhomogeneous elastic foundation under the action of a non-stationary random load. The XXII International Scientific

Conference «Construction the Formation of Living Environment» (FORM2019), Tashkent, 18 - 21 апреля 2019. URL: doi.org/10.1051/e3sconf/20199704052.

4. Deminov P.D. Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. 2021, № 1 (93). pp.16-25.

5. Deminov P.D. Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. 2022, № 1 (99), pp.3-10.

6. Nasonkin V.D., Sobolev D.N. O raspredelenii napryazhenij v statisticheski neodnorodnoj poluploskosti. Problemy nadezhnosti v stroitel'noj mekhanike: Materialy ko Vtoroj Vsesoyuz. konferencii po problemam nadezhnosti v stroit. mekhanike Vil'nyus: 1968, pp. 148-150.

7. Nasonkin V.D. Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzhenij. 1968, № 1, pp.20-21.

8. Usupov A.K. Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzhenij. 1969, № 5, pp.32-34.

9. Usupov A.K. Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzhenij. 1971, № 1, pp,26-31.

10. Pugachyov V.S. Teoriya sluchajnyh funkcij i eyo primenenie k zadacham avtomaticheskogo upravleniya [Theory of random functions and its application to automatic control problems]. Moskva: Fizmatizdat, 1960, pp.248-303.

11. Mihlin S.G. Trudy Sejsmologicheskogo instituta AN SSSR, 1935, № 65. Leningrad: Izd-vo Akad. nauk SSSR, 83 p.

12. Teodorescu P. P., Predeleanu M. Über das ebene Problem nichthomogener elastischer Körper. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1959. T. 27, pp. 349-369.

13. Bracewell, R. The Sign Function, In The Fourier Transform and Its Applications, 3rd ed., New York: McGraw-Hill, 1999, pp.61-62.