

Аналитическое представление и расчет полужестких узлов при наличии частичного ограничения возможного поворота угла

П.В. Сапожников, В.В. Кузнецов, В.С. Никулин

Белгородский Государственный Технологический Университет им. В.Г. Шухова

Аннотация: В статье рассматриваются вопросы совершенствования аналитического описания усилий, возникающих в однопролетной изгибаемой конструкции при наличии коэффициентов, характеризующих доли возможного поворота опорных узлов относительно максимальных значений, вычисленных при наличии в опорных узлах идеальных шарниров.

Ключевые слова: полужесткие узлы, многослойные конструкции, методы расчета, контактная зона, деревянные балки, армирование, древесина, арматура, экологичность.

Введение

Широта применения деревянных балок объясняется их легкостью, простотой монтажа, низкой стоимостью. Перечисленные преимущества многократно подтверждены при возведении и эксплуатации различных зданий и сооружений в России и за рубежом. Клееным конструкциям присущи и другие преимущества древесины, как строительного материала – большие запасы и возобновляемость ресурсов, низкая энергоемкость изготовления, высокая относительная прочность элементов, легкая обрабатываемость, эстетичный вид, экологическая чистота. Следующим шагом для увеличения экономичности [1] деревянных конструкций являются армированные деревянные конструкции, в том числе, в качестве армирования деревянных балок необходимо учитывать специфические особенности материалов [2], а в качестве арматуры могут использоваться как стальные стержни, так и углеволокно [3].

Общеизвестно, что усилия в расчетных сечениях однопролетных балках и, как следствие, надежность конструкций, в которых отсутствует стык в пролете, в основном определяются конструктивными решениями опорных узлов, которые могут иметь различную жесткость. Жесткость и разрешенные углы поворота опорных узлов балок в значительной степени

вливают на величину максимальных пролетных и опорных моментов. Как правило, опорные узлы соединения деревянных балок [4], решают при помощи стальных связей, выполненных в виде гвоздей, шурупов, нагелей или нагельных болтов, разнообразных когтевых шайб или зубчатых пластин, которые организуют связь с малой податливостью. В процессе усиления [5] опорный узел может как армироваться, так и полностью заменяться стальным прокатным профилем [6].

В настоящий момент актуальны исследования различного способа организации жесткого узла [7] путем применения клеенных шайб и стальных полос. И имеются научные труды [8] по оценке податливости узла на основе существующих данных о возникающем в нем изгибающем моменте. Влияние наличия полужестких узлов в конструкции на распределение усилий нужно учитывать при расчете конструктивных схем как состоящих только из однородных стержней, так и с присутствием в конструктивной схеме многослойных (составных) стержней [9]. При расчете многослойных композитных стержней [10] особенно важно определение действующих усилий в сечениях для верного нахождения напряжений в каждой составной части стержня.

Сформулированы следующие цели и предпосылки:

1) Определение аналитических зависимостей (функций) перемещений сечения балки, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил в однопролетной балке с опорными узлами, в которых возможная величина поворота характеризуется долей от величины максимального поворота узла при наличии в нем шарнира;

2) Предложение методики для определения усилий в однопролетном изгибаемом элементе с постоянной по его длине линейной жесткостью и полужесткими узлами с частичным ограничением на разную величину углов поворота опорных узлов;

3) Используем допущение об отсутствии вертикального смещения всех опор однопролетной балки;

4) Используем допущение о постоянной по длине балки линейной изгибной жесткости $EJ = \text{const}$, в контексте данной статьи для расчета составных стержней подразумевается использование методики приведения составного стержня к однородному;

5) Используем допущение об интегрируемости и непрерывности по длине балки функции нагрузки, а также отсутствии сосредоточенных вертикальных сил в пролете балки.

1. Вывод аналитических зависимостей

В рамках данной статьи предлагается рассмотреть расчетный случай с присутствием податливости опорных узлов на некоторую величину. Основные ограничения, которые накладываются на узлы, это возможные величины поворота, ограниченные коэффициентами k_0 и k_L на опорах А и Б, соответственно. Коэффициенты k_0 и k_L характеризуют доли разрешенного поворота узлов относительно величины максимальных. Коэффициенты имеют индексы-координаты нуль (опора А) и индекс-координату L (опора Б). Расчетная схема рассматриваемой конструкции представлена на рис 1.

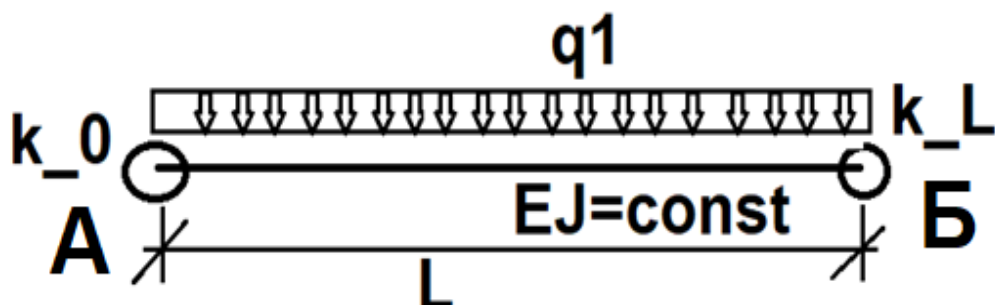


Рис. 1. – Однопролетная балка на двух опорах

Нагрузка принята равномерно распределенная и равная q_1 , изгибная жесткость балки принята линейная и постоянная по всей длине. В случае с распределенной нагрузкой и постоянной жесткостью участка, жесткость

участка выводим за пределы уравнения и не рассматриваем в дальнейшем, при этом функция поворотов без учета изгибной жесткости будет описываться формулой (1), а функция перемещений без учета изгибной жесткости будет описываться формулой (2):

$$\varphi(x) = \frac{q_1 \cdot x^3}{6} + C1 \cdot \frac{x^2}{2} + C2 \cdot x + C3 \quad (1)$$

$$u(x) = \frac{q_1 \cdot x^4}{24} + C1 \cdot \frac{x^3}{6} + C2 \cdot \frac{x^2}{2} + C3 \cdot x + C4 \quad (2)$$

где $\varphi(x)$ – функция поворотов сечения однопролетной балки;

$u(x)$ – функция перемещений сечения однопролетной балки;

x – расстояние от середины балки;

$C1 C2 C3 C4$ – определяемые из граничных условий константы, полученные в процессе интегрирования функции нагрузки.

Примем начало координат в середине балки. Для случая абсолютных шарниров на опорах А и Б, константы, появившиеся в процессе интегрирования $C1; C2; C3; C4$, будут иметь значения $0; \frac{-L^2 \cdot q_1}{8}; 0; \frac{5 \cdot L^4 \cdot q_1}{384}$ соответственно. Для вычисления значения угла поворота на опоре А можно подставить в функцию поворотов сечения (1) значение $-\frac{L}{2}$, а для вычисления момента на опоре Б - значение $\frac{L}{2}$. При этом, на опоре А получим значение положительного поворота сечения, а на опоре Б отрицательного. При нахождении начала координат в середине балки и симметричной нагрузке, константы, появившиеся в процессе интегрирования с нечетными номерами, обращаются в нулевые.

1.1 Применение коэффициентов разрешенных углов поворота для описания полужестких узлов:

При введении коэффициента к вычисленным величинам поворотов сечения балки на левой опоре получим формулу (3), также введем

коэффициент к вычисленному изгибающему моменту на правой опоре и получим формулу (4).

$$(1 - k_0) \cdot \frac{L^3 \cdot q_1}{28} \quad (3)$$

$$(1 - k_L) \cdot -\frac{L^3 \cdot q_1}{28} \quad (4)$$

где $k_0 k_L$ – коэффициенты, характеризующие долю разрешенного поворота относительно максимального.

Так, при использовании формулы (3) при $k_0 = 0$, разрешается поворот узла на максимальную величину, а при $k_0 = 1$ полностью запрещается.

Новые граничные условия, описанные формулой (3) и (4), используем для нахождения констант интегрирования $C1; C2; C3; C4$, которые будут зависеть от коэффициентов $k_0 k_L$, и будут принимать значения $\frac{L \cdot q_1 (k_L - k_0)}{4}$; $\frac{L^2 q_1 (k_0 + k_L - 3)}{24}$; $\frac{L^3 q_1 (k_0 - k_L)}{96}$; $\frac{L^4 \cdot q_1 (5 - 2 \cdot k_0 - 2 \cdot k_L)}{384}$, соответственно.

При подстановке новых значений $C1; C2; C3; C4$ в формулы (1), (2) для вычисления углов поворота и перемещений сечения балки, также получим формулы для вычисления изгибающих моментов и поперечных сил. Функции, учитывающие введенные коэффициенты $k_0 k_L$ для описания перемещений (5), поворотов (6), изгибающих моментов (7), и поперечных сил (8), будут принимать следующий вид:

$$u(x) = q_1 \left[\frac{x^4}{24} - \frac{x^3 L (k_0 - k_L)}{24} + \frac{L^2 x^2 (k_0 + k_L - 3)}{48} + \frac{L^3 x (k_0 - k_L)}{96} - \frac{L^4 (2k_0 + 2k_L - 5)}{384} \right] \quad (5)$$

$$\varphi(x) = \frac{q_1 x^3}{6} - \frac{q_1 L x^2 (k_0 - k_L)}{8} + \frac{q_1 L^2 x (k_0 + k_L - 3)}{24} - \frac{q_1 L^3 (k_0 - k_L)}{96} \quad (6)$$

$$M(x) = \frac{q_1 x^2}{2} - \frac{q_1 L x (k_0 - k_L)}{4} + \frac{q_1 L^2 (k_0 + k_L - 3)}{24} \quad (7)$$

$$Q(x) = q_1 x - \frac{q_1 L (k_0 - k_L)}{4} \quad (8)$$

где $u(x); \varphi(x)$ – функции перемещений и углов поворота сечения, однопролетной балки с коэффициентами k_0 и k_L , характеризующими возможные повороты сечения на опорах;

$M(x); Q(x)$ – функция изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях однопролетной балки с коэффициентами k_0 и k_L , характеризующими возможные повороты сечения на опорах;

x – расстояние от середины балки до рассматриваемого сечения.

Функция поперечных сил является линейной функцией, имеющей положительные значения на одной опоре и отрицательные на другой, при нахождении нулевых значений поперечных сил можно получить позицию максимума изгибающего момента в пролете балки. Нулевые значения поперечной силы будут находится в точке с координатой, вычисленной по формуле (9), при этом изгибающий момент в этой точке вычисляется по формуле (10).

$$x_{Q=0} = \frac{L \cdot (k_L - k_0)}{4} \quad (9)$$

$$M(x_{Q=0}) = \frac{L^2 \cdot q_1 (-3k_0^2 + 4k_0 + 6k_0 \cdot k_L + 4k_L - 3k_L^2 - 12)}{96} \quad (10)$$

Изгибающие моменты в однопролетной балке с узлом на опоре А, в котором возможные повороты характеризуются коэффициентом k_0 и шарнирным узлом на опоре Б, представлены на рис 2.

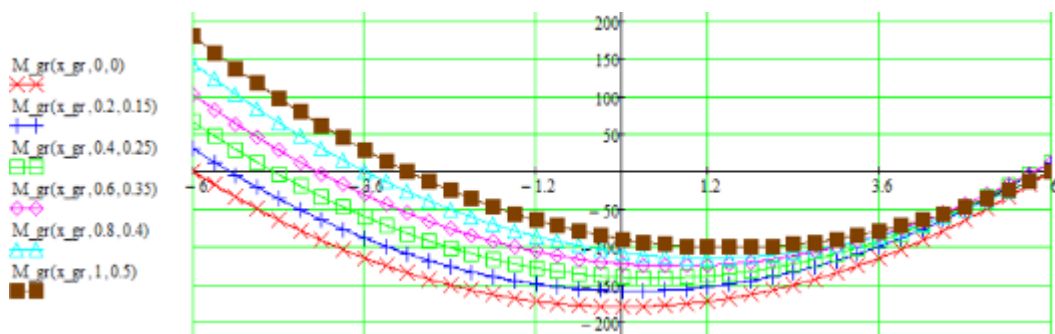


Рис. 2. – Изгибающие моменты в однопролетной балке с полужестким и шарнирным узлом

Для визуализации здесь и далее примем следующие исходные данные: $q_1=10$, $L = 12$. По горизонтальной оси отмечены значения переменной x – расстояние от середины балки. По вертикальной оси отмечены значения

изгибающего момента, полученного с использованием аналитической формулы, значение коэффициентов k_0 k_L представлены в скобках.

Как можно заметить, при значениях коэффициентов $k_0 = 0$ и $k_L = 0$ график аналитически верно описывает функцию изгибающих моментов в шарнирно оперной балке, при защемлении узла на опоре А, возникает необходимость подбора значения коэффициента, так как при $k_L = 0,5$ эпюра моментов приобретает верные очертания. Иначе говоря, при рассмотрении ситуации полужесткого защемления балки на опоре А и шарнирного закрепления на опоре Б, возникает необходимость в масштабировании коэффициента k_L .

Изгибающие моменты в однопролетной балке с узлом на опоре А, в котором возможные повороты характеризуются коэффициентом k_0 и жестким узлом на опоре Б, представлены на рис 3.

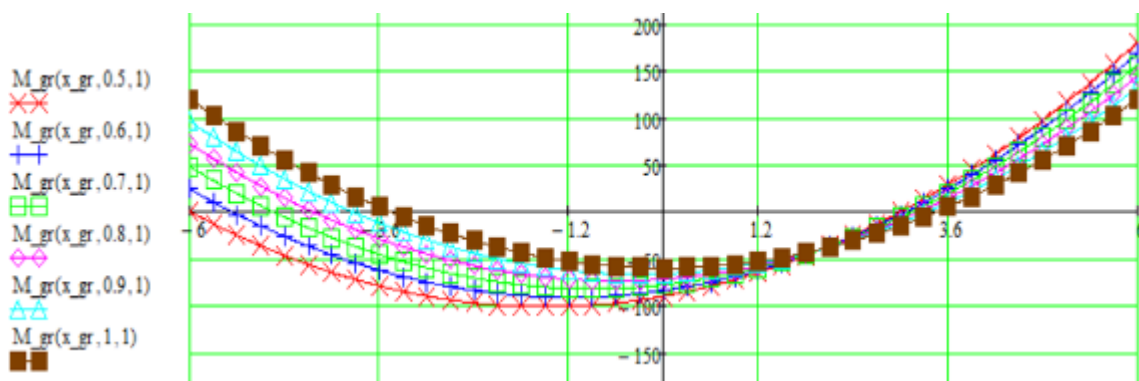


Рис. 3. – Изгибающие моменты в однопролетной балке с полужестким и жестким узлом

Как можно заметить, при значениях коэффициентов $k_0 = 1$ и $k_L = 1$ график визуально верно описывает функцию изгибающих моментов в жестко защемленной с двух сторон балке, при защемлении узла на опоре Б, возникает необходимость подбора значения коэффициента, так как при $k_0 = 0,5$ эпюра моментов приобретает верные очертания. Иначе говоря, при рассмотрении ситуации полужесткого защемления балки на опоре А и

жесткого закрепления на опоре Б возникает необходимость в масштабировании коэффициента k_0 .

Так как в ходе определения аналитических формул появилась необходимость в масштабировании коэффициентов $k_0; k_L$, предлагается рассмотреть упрощенную ситуацию, где узел на опоре А является полужестким, а на опоре Б шарнирным (возникающий изгибающий момент равен нулю).

1.2 Применение коэффициента разрешенных углов поворота с обнулением изгибающего момента на шарнирной опоре для описания полужестких узлов:

Новые граничные условия описываются формулой (3) и нулевым моментом на опоре Б. Используем их для нахождения констант интегрирования $C1; C2; C3; C4$, которые будут зависеть от коэффициента k_0 , и будут принимать значения $\frac{-L \cdot q_1 k_0}{8}; \frac{L^2 q_1 (k_0 - 2)}{16}; \frac{L^3 q_1 k_0}{192}; \frac{L^4 \cdot q_1 (5 - 3 \cdot k_0)}{384}$ соответственно.

Функции, учитывающие введенные коэффициенты $k_0 k_L$ для описания перемещений (11), поворотов (12), изгибающих моментов (13), и поперечных сил (14), будут принимать следующий вид:

$$u(x) = \frac{q_1 x^4}{24} - \frac{q_1 x^3 L k_0}{48} + \frac{q_1 L^2 x^2 (k_0 - 2)}{32} + \frac{q_1 L^3 x k_0}{192} - \frac{q_1 L^4 (3k_0 - 5)}{384} \quad (11)$$

$$\varphi(x) = \frac{q_1 x^3}{6} - \frac{q_1 L x^2 k_0}{16} + \frac{q_1 L^2 x (k_0 - 2)}{16} - \frac{q_1 L^3 k_0}{192} \quad (12)$$

$$M(x) = \frac{q_1 x^2}{2} - \frac{q_1 L x k_0}{8} + \frac{q_1 L^2 (k_0 - 2)}{16} \quad (13)$$

$$Q(x) = q_1 x - \frac{q_1 L k_0}{8} \quad (14)$$

где $u(x); \varphi(x)$ – функции перемещений и углов поворота сечения, однопролетной балки с коэффициентом k_0 , характеризующим возможный поворот сечения на опорах и обнуленным моментом;

$M(x); Q(x)$ – функция изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях однопролетной балки с коэффициентом k_0 , характеризующим возможный поворот сечения на опорах и обнуленным моментом.

Изгибающие моменты в однопролетной балке с узлом на опоре А, в котором возможные повороты характеризуются коэффициентом k_0 и узлом с обнуленными моментами на опоре Б, представлены на рис 4.

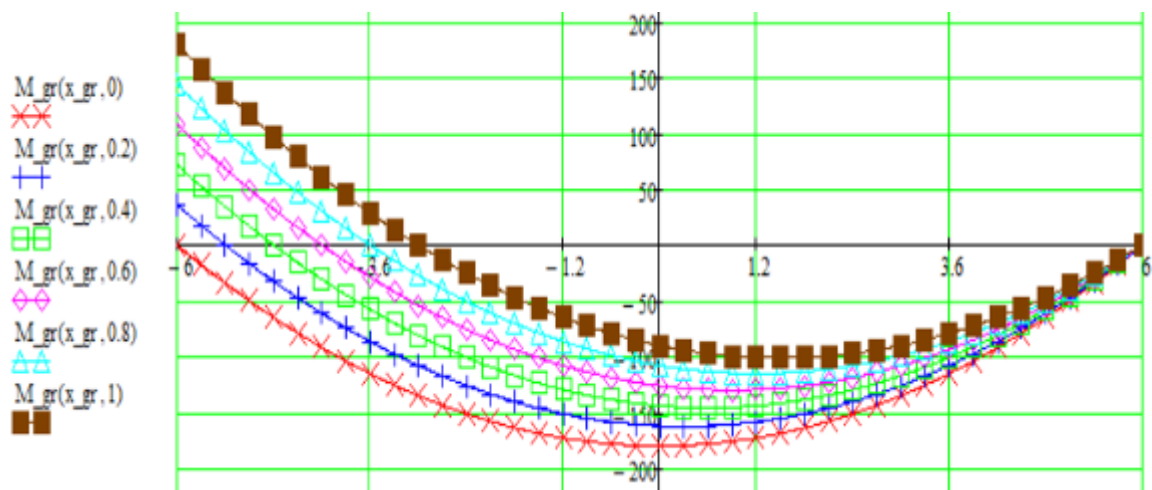


Рис. 4. – Изгибающие моменты в однопролетной балке с полужестким и узлом с обнуленными моментами

Как можно заметить, коэффициент k_0 изменяется от 0 до 1, характеризуя максимально возможные повороты узла А, при этом при любых значениях коэффициента k_0 в опоре Б нулевое значение момента. Иначе говоря, при рассмотрении ситуации полужесткого защемления балки на опоре А и узла с принудительным обнулением момента на опоре Б, коэффициент k_0 не нуждается в масштабировании и обладает высокой информативностью. Используем данный положительный эффект при дальнейших выводах аналитических зависимостей.

1.3 Применение линейно зависимых коэффициентов для описания полужестких узлов:

Введем дополнительные повышающие описательную способность (масштабирование) аналитической формулы коэффициенты $X_1 X_2$. к

вычисленному повороту сечения на левой опоре, в данном случае он будет описываться формулой (15), также введем коэффициенты к вычисленному изгибающему моменту на правой опоре: он будет описываться формулой (16).

$$X_2 \cdot (1 - k_0) \cdot \frac{L^3 \cdot q_1}{28} + X_1 \cdot (1 - k_L) \cdot \frac{L^3 \cdot q_1}{28} \quad (15)$$

$$X_2 \cdot (1 - k_0) \cdot -\frac{L^3 \cdot q_1}{28} + X_1 \cdot (1 - k_L) \cdot -\frac{L^3 \cdot q_1}{28} \quad (16)$$

где k_0 k_L – коэффициенты, характеризующие долю разрешенного поворота относительно максимального;

X_1 X_2 – вычисляемые коэффициенты, повышающие описательную способность аналитической формулы.

Новые граничные условия, описанные формулой (17) и (18), используем для нахождения констант интегрирования $C1; C2; C3; C4$, которые при новых граничных условиях будут зависеть от коэффициентов k_0 k_L , а при итерационно определенных значениях $X_1 = \frac{1}{6}$ и $X_2 = \frac{2}{3}$ будут равны $\frac{Lq_1(k_0-k_L)}{8}; \frac{L^2q_1(34.75 \cdot k_0+34.75 \cdot k_L-111.167)}{1000}; \frac{L^3q_1(5.21 \cdot k_0-5.21 \cdot k_L)}{1000}; \frac{L^4 \cdot q_1(1129-434 \cdot (k_L+k_0))}{1000}$.

Функции, учитывающие введенные коэффициенты k_0 k_L для описания перемещений (17), поворотов (18), изгибающих моментов (19), и поперечных сил (20), будут принимать следующий вид:

$$u(x) = q_1 \left[\frac{x^4}{24} + \frac{x^3 L(k_0 - k_L)}{48} + \frac{L^3 x^2 (35k_0 + 35k_L - 111)}{2000} - \frac{L^3 x (5.21k_0 - 5.21k_L)}{100} - \right. \\ \left. - L^4 (4.344k_0 - 4.344k_L - 11) 1000 \right] \quad (17)$$

$$\varphi(x) = q_1 \left[\frac{x^3}{6} + \frac{Lx^2(k_0 - k_L)}{16} + \frac{L^2 x (35k_0 + 35k_L - 111)}{1000} - \frac{L^3 x (5.21k_0 - 5.21k_L)}{50} \right] \quad (18)$$

$$M(x) = \frac{q_1 x^2}{2} + \frac{q_1 L x (k_0 - k_L)}{8} + \frac{q_1 L^2 (97k_0 + 97k_L - 236)}{500} \quad (19)$$

$$Q(x) = q_1 x + \frac{q_1 L (k_0 - k_L)}{8} \quad (20)$$

где $u(x)$; $\varphi(x)$; $M(x)$; $Q(x)$ – функции перемещений, поворотов сечения, изгибающих моментов, поперечных сил в сечениях однопролетной балки с уточненными коэффициентами k_0 k_L и X_1 X_2 .

Изгибающие моменты в однопролетной балке с опорными узлами А и Б, в которых возможные повороты характеризуются коэффициентами k_0 и k_L , а также зависящие от линейных коэффициентов X_1 X_2 ., представлены на рис 5.

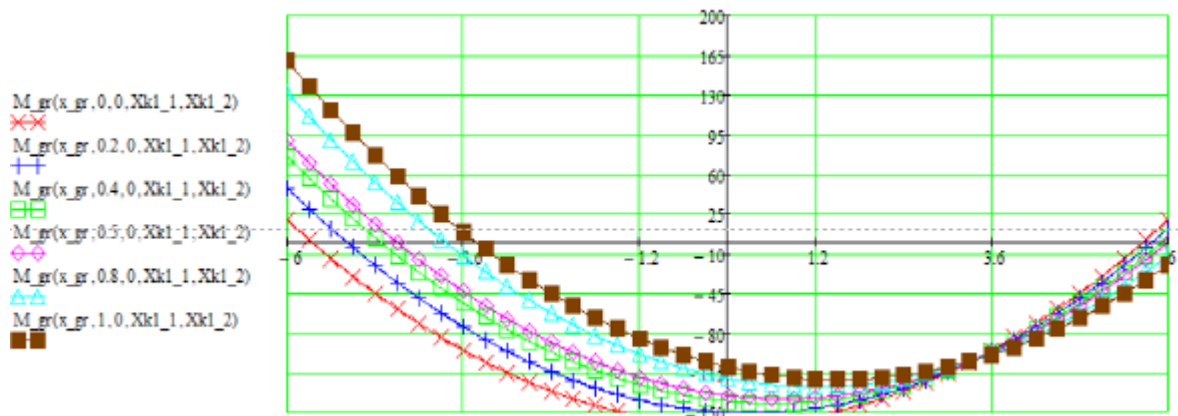


Рис. 5. – Изгибающие моменты в однопролетной балке с полужесткими узлами, зависящими от X_1 X_2

Как можно заметить при обнулении коэффициента k_L , значения моментов на опоре Б не являются нулевыми, однако, коэффициенты k_0 и k_L изменяется от 0 до 1 и не нуждаются в масштабировании.

2. Предлагаемые аналитические зависимости для определения усилий при наличии полужестких узлов

При введении дополнительных, повышающих описательную способность аналитической формулы коэффициентов X_1 X_2 , образовалась неточность в определении момента на шарнирной опоре. В данном случае, неточность может быть определена аналитически, что будет являться дополнительным слагаемым к изгибающему моменту в сечении балки. Предлагаемая формула изгибающего момента, зависящая от величин X_1 X_2 и

коэффициентов, разрешающих угол поворота на опорах k_0 k_L , будет описываться формулой (21).

$$M(x) = M(x; k_0; k_L; X_1; X_2) + q_1 \left(\frac{L^2}{8} - \frac{16}{1000} \right) (k_0^2 + k_L^2) \quad (21)$$

Визуальное представление функции изгибающих моментов в однопролетной балке, которая зависит от величин X_1 X_2 и коэффициентов, разрешающих угол поворота на опорах k_0 и k_L , представлены на рис 5.

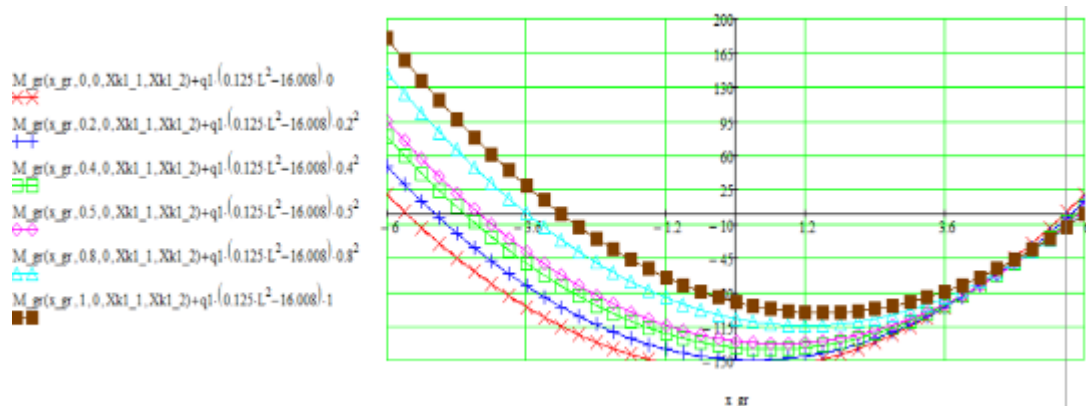


Рис. 5. – Изгибающие моменты в однопролетной балке, зависящие от величин X_1 X_2 и коэффициентов, разрешающих угол поворота на опорах

Примечательно, что в данной формуле учитываются коэффициенты, применяемые к углам поворота и добавочные слагаемые к величине изгибающих моментов. Как можно заметить, коэффициент k_0 и k_L не нуждается в масштабировании и обладает высокой информативностью.

2.1 Сводная аналитическая таблица:

В инженерной практике может потребоваться не только использование аналитических зависимостей, но и табличных значений. При некоторых инженерных расчетах часто используются существующие расчетные комплексы, и различные калькуляторы, которые позволяют строить эпюры усилий в автоматическом режиме. Для работы с подобными программами может потребоваться информация о величинах опорных изгибающих моментов для нагружения ими шарнирной балки. Для приведения шарнирно

опираемой однопролетной балки к балке с полужесткими узлами различной степени заземления можно использовать значения опорных моментов, которые задаются как внешняя нагрузка в виде сосредоточенного изгибающего момента в опорном узле представленных в таблице 1.

Таблица № 1

Опорные моменты однопролетной в однопролетной балке при различном заземлении узла

$\frac{q_1 L^2}{k_{\text{таб}}}$	Значение коэффициента k_L на опоре Б						
		0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
Значение коэффициента k_0 на опоре А	0.3	27.4/39.4/ 27.4/39.4	29.8/36.3/ 21.4/50.5	32.6/33.1/ 17.5/61.5	36.0/30.0/ 14.9/72.6	40.3/26.8/ 12.9/83.7	45.7/23.7/ 12.0/90.0
	0.4	21.4/50.5/ 29.8/36.3	22.8/47.3/ 22.8/47.3	24.4/44.2/ 18.5/58.4	26.3/41.0/ 15.6/69.4	28.5/37.9/ 13.4/80.5	31.1/34.7/ 12.0/90.0
	0.5	17.5/61.5/ 32.6/33.1	18.5/58.4/ 24.4/44.2	19.6/55.2/ 19.6/55.2	20.7/52.1/ 16.3/66.3	22.1/48.9/ 14.0/77.3	23.6/45.8/ 12.2/88.4
	0.6	14.9/72.6/ 36.0/30.0	15.6/69.4/ 26.3/41.0	16.3/66.3/ 20.7/52.1	17.1/63.1/ 17.1/63.1	18.0/60.0/ 14.6/74.2	19.0/56.8/ 12.7/85.2
	0.7	12.9/83.7/ 40.3/26.8	13.4/80.5/ 28.5/37.9	14.0/77.3/ 22.1/48.9	14.6/74.2/ 18.0/60.0	15.2/71.0/ 15.2/71.0	15.9/67.9/ 13.2/82.1
	0.8	12.0/90.0/ 45.7/23.7	12.0/90.0/ 31.1/34.7	12.2/88.4/ 23.6/45.8	12.7/85.2/ 19.0/56.8	13.2/82.1/ 15.9/67.9	13.7/78.9/ 13.7/78.9

Для приведения шарнирно опираемой однопролетной балки к балке с полужесткими узлами следует определиться с величиной коэффициентов k_0 ; k_L , отыскать их в таблице, а затем для нахождения величины изгибающего момента на опоре А применить верхний левый индекс из таблицы, для нахождения момента на опоре Б – нижней левый. Для определения максимального изгибающего момента в пролете следует использовать верхний правый и нижний правый индексы из таблицы. Так, для $k_0 = 0,4$; $k_L = 0,7$ и определения изгибающего момента на опоре А требуется применение конечной формулы (22), а для определения изгибающего момента на опоре, Б требуется применение конечной формулы

(23). Легко заметить, что таблица обладает симметричностью относительно диагонали, которая образована значениями с одинаковыми коэффициентами заземления опор. Так, балка с $k_0 = 0,8$; $k_L = 0,3$ является симметричным случаем заземления $k_0 = 0,3$; $k_L = 0,8$, при этом величины значений идентичны и поменяли место расположения.

$$\frac{q_1 L^2}{k_{\text{таб(низ, лев)}}} = \frac{q_1 L^2}{13.4} \quad (22)$$

$$\frac{q_1 L^2}{k_{\text{таб(верх, лев)}}} = \frac{q_1 L^2}{28.5} \quad (23)$$

2.2 Оценка масштабных коэффициентов численными методами:

При подборе масштабных коэффициентов производилась оценка отклонений значений функции, зависящей от величины X_1 X_2 и функций, которыми описывались граничные ситуации на всем промежутке определения.

Для определения величины отклонения может быть использована средняя среднеквадратичная (MSE), которую в общем случае сравнения функции $y(x, X_1, X_2)$, с функциями y_1 ; y_2 ; ...; y_m можно представить формулой (24), и средняя абсолютная ошибка (MAE), в общем случае ее можно представить формулой (25).

$$\frac{1}{n \cdot m} \sum_{i=0}^n \left[\left(\frac{y_1(x)_i}{y(x, X_1, X_2)_i} - 1 \right)^2 + \dots + \left(\frac{y_m(x)_i}{y(x, X_1, X_2)_i} - 1 \right)^2 \right] \quad (24)$$

$$\frac{1}{n \cdot m} \sum_{i=0}^n \left[\left| \frac{y_1(x)_i}{y(x, X_1, X_2)_i} - 1 \right| + \dots + \left| \frac{y_m(x)_i}{y(x, X_1, X_2)_i} - 1 \right| \right] \quad (25)$$

где $y_1(x)_i$; $y_2(x)_i$; $y_m(x)_i$ – i -значения эталонных функций, описывающие граничные ситуации;

n – количество точек, в которых вычисляется отклонение.

Проведем сравнительный анализ функций (13, 19, 21) изгибающих моментов с эталонными краевыми условиями жесткого и шарнирного закрепления, для анализа ошибок используем формулы (24, 25).

Сопоставление полученных результатов выполним в виде таблицы 1. В процессе анализа пролет разбивался на 270 отрезков, что давало стабильный результат, при этом не перегружая вычисления.

Таблица № 2

Сопоставление полученных результатов

№	Аналитическая зависимость	MSE	MAE
13	$M(x; k_0) = \frac{q_1 x^2}{2} - \frac{q_1 L x k_0}{8} + \frac{q_1 L^2 (k_0 - 2)}{16}$	0,017	0,017
19	$M(x; k_0; X_1; X_2) = q_1 \left[\frac{x^2}{2} + \frac{Lx(k_0 - k_L)}{8} + \frac{L^2(97k_0 + 97k_L - 236)}{500} \right]$	1,885	0,418
21	$M(x; k_0; k_L; X_1; X_2) + q_1 \left(\frac{L^2}{8} - 16.008 \right) \cdot k_0^2$	1,068	0,307

При минимизации ошибки и поиска минимального значения отклонения одной функции с изменяемыми параметрами X_1 X_2 от эталонной, путем численного решения были определены величины $X_1 = \frac{1}{6}$ и $X_2 = \frac{2}{3}$, для анализа использовалась функция MSE, как показывающая большие значения ошибки при одинаковых отклонениях по сравнению с MAE.

Заключение

Основываясь на вышеизложенном, можно сделать следующие выводы:

1) Предложено рассмотрение полужесткого опорного узла однопролетной балки, как ограниченного в поворотах на некоторую долю от максимального поворота, вычисленного аналитически на предыдущей итерации анализа;

2) Найдены зависимости перемещений сечения балки: формула (5), углов поворота: формула (6), изгибающих моментов: формула (7) и поперечных сил: формула (8) по длине балки, выраженные через коэффициенты разрешенного угла $k_0; k_L$ произведена графическая и численная оценка отклонения полученных зависимостей;

3) Найдены зависимости перемещений сечения балки: формула (11), углов поворота: формула (12), изгибающих моментов: формула (13) и поперечных сил: формула (14) по длине балки, выраженные через коэффициенты разрешенного угла k_0 на опоре А и обнуленном изгибающем моменте в опоре Б;

4) Предложены аналитические зависимости перемещений сечения балки: формула (17), углов поворота: формула (18), изгибающих моментов: формула (19) и поперечных сил: формула (20) в однопролетной балке зависящие от величин разрешенной доли поворота от величины максимального поворота узла при наличии в нем шарнира, выраженные через коэффициенты k_0 ; k_L и $X_1 = \frac{1}{6}$; $X_2 = \frac{2}{3}$;

5) Определены аналитические зависимости для упрощенного случая, такого, как полужесткий узел на одной опоре и узел с обнуленным изгибающим моментом на другой, полученные формулы имеют минимальное отклонение при численной оценке ошибок;

6) Предложенные аналитические формулы (19, 21) могут быть использованы для определения усилий в однопролетных балках как однородного, так и составного сечения. В рамках дальнейшего исследования возможно изучение влияния наличия полужестких узлов на распределение напряжений в стержнях составного сечения;

7) Предложена методика для определения усилий в однопролетном изгибаемом элементе с постоянной по его длине линейной изгибной жесткостью и полужесткими узлами. Для определения усилий используются таблица 1 и формулы (22, 23). В рамках применения данной методики при расчете составных балок возможно рассмотрение приведенной жесткости слоистого стержня к однородной жесткости.

Литература

1. Guyer E.C. Handbook of Applied Thermal Design. USA: CRC Press, 1999, pp. 75-76.
2. Максимов С.П., Башкова Ю.Б., Шкуркина А.И., Вшивков Е.П. Особенности армирования деревянных балок стеклопластиковой арматурой // Технические науки – от теории к практике. 2015. №4 (41), С. 79-84.
3. Herschel W. The Scientific Papers of Sir William Herschel. USA: Cambridge University Press, 2013, pp. 25-26.
4. Карлсен Г.Г., Большаков В.В., Каган М.Е., Александровский К.В., Бочкарев И.В., Фоломин А.И. Деревянные конструкции. 1998. 39с.
5. Опбул Э.К., Калдар-Оол А.Б., Сат Саян Ч. Эффективный способ усиления деревянных балок междуэтажного перекрытия // Вестник Тувинского государственного университета. Технические и физико-математические науки. 2023. №1. С. 14-27.
6. Мальганов А.И., Плевков В.С., Полищук А.И. Восстановление и усиление строительных конструкций аварийных и реконструируемых зданий (Атлас схем и чертежей). Томск: Томский межотраслевой ЦНТИ, 1990. 316 с.
7. Ишмаева Д. Д., Вдовин В. М. Жёсткие узлы клеёных деревянных балочных элементов на вклеенных стальных шайбах // Вестник ОГУ. 2014. №1 (162). – Оренбург: Вестник ОГУ, 2014. – С. 189-195.
8. Ананьин М. Ю., Фомин Н.И. Метод учета податливости в узлах металлических конструкций зданий // Академический вестник УралНИИпроект РААСН. 2010. №2, С. 69-71.
9. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластинки. М., Стройиздат, 1986г. -316с.
10. Кочерженко В.В., Сапожников П.В., Кузнецов В.В. Планирование эксперимента испытания выштамповки на сдвиг в



перпендикулярном направлении // Инженерный вестник Дона. 2023. №11.
URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n11y2023/8796

References

1. Guyer E.C. Handbook of Applied Thermal Design. USA: CRC Press, 1999, pp. 75-76.
2. Maksimov S.P., Bashkova Y.B., Shkurkina A.I., Vshivkov E.P. *Tekhnicheskie nauki ot teorii k praktike*. 2015. №4 (41). p. 79-84.
3. Herschel W. *The Scientific Papers of Sir William Herschel*. USA: Cambridge University Press, 2013, p. 25-26.
4. Karlsen G. G., Bol'shakov V. V., Kagan M. E., Aleksandrovskij K. V., Bochkarev I. V., Folomin A. I. *Derevjannye konstrukcii [Wooden structure]*, 1998. 39 p.
5. Opubl E.K., Kaldar-Ool A.B., Sat Sayan C. *Vestnik Tuvinskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie i fizikomatematicheskie nauki*. 2023. №1. p. 14-27.
6. Mal'ganov A.I., Plevkov V.S., Polishchuk A.I. *Vosstanovlenie i usilenie stroitel'nykh konstruktsiy avariynykh i rekonstruiruemykh zdaniy (Atlas skhem I chertezhey) [Restoration and strengthening of building structures damaged and reconstructed buildings (Atlas diagrams and drawings)]*. Tomsk: Tomskiy mezhotraslevoy TsNTI, 1990. 316 p.
7. Ishmaeva D. D., Vdovin V. M. *Vestnik OGU*. 2014. №1 (162). Orenburg: Vestnik OGU, 2014. p. 189-195.
8. Ananyin M. Yu., Fomin N.I. *Akademicheskij vestnik UralNIIproekt RAASN*. 2010. №2. p. 69-71.
9. Rzhanicyn A.R. *Sostavnye sterzhni i plastinki [Composite rods and plates]*. M., Strojizdat, 1986g. 316 p.
10. Kocherzhenko V.V., Sapozhnikov P.V., Kuznetsov V.V. *Inzhenernyj vestnik Dona*. 2023. №11. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n11y2023/8796



Дата поступления: 23.12.2023

Дата публикации: 8.02.2024