Модель управления запасами в строительной сфере, основанная на марковских случайных процессах

С.А. Баркалов, С.И. Моисеев, Е.А. Серебрякова

Воронежский государственный технический университет

Аннотация: В работе рассмотрена математическая модель, которая создана, чтобы оценивать вероятность наличия ресурсов на строительных объектах в течение ближайших периодов времени. Модель основана на марковских случайных процессах гибели и размножения. Проведен качественный анализ наличия ресурсов на период от 1 до 7 временных периодов и даны рекомендации по эффективному управлению запасами на строительных объектах.
Ключевые слова: строительство, ресурсы, управление, запасы, математическое моделирование, вероятность, потоки событий, марковские случайные процессы, процессы гибели и размножения.

Введение

Сфера строительства, которая интенсивно развивается в последнее время, выявляет большое количество различных проблем, которые считались неактуальными несколько десятилетий назад. Если раньше было возможное четкое планирование ресурсного обеспечения строительными объектами на протяжении всего цикла строительства, то на сегодняшний день, ввиду обострения конкуренции между строительными организациями, возникает необходимость постоянного контроля за уровнем имеющихся ресурсов, снижения затрат на их поставку, определения нормативного уровня запаса ресурсов в динамике, обеспечения своевременности поставки ресурсов [1, 2].

В виду этого, задача эффективного управления запасами ресурсов на строительных объектах на текущей момент является актуальной и необходимой для выполнения графиков реализации строительных проектов [3].

Целью данной работы является задача разработать математическую модель, которая позволит прогнозировать объем необходимых запасов на некотором строительном объекте в зависимости от интенсивностей их пополнения и расходования в условиях нестационарных темпов строительства.

Постановка задачи

Учитывая, то, что процесс строительства зависит от большого числа внешних факторов и внутренних условий, он достаточно непредсказуем [4], то есть, является в своей динамике случайным процессом. Ввиду этого, для его моделирования рационально использовать вероятностные методы. В связи с тем, что объем запасов может постоянно меняться со временем как в возрастающую, так и в убывающую сторону, для математического описания динамики количества запаса рационально использовать случайные функции или случайные процессы [5-7]. Таким образом, представленная в работе модель оценки объема запасов для строительных объектов будет основана на теории марковских случайных процессов с непрерывным временем.

Для моделирования задачи пополнения запасов на объектах строительства на основе теории марковских процессов, необходимо обосновать условие того, чтобы переход системы между своими состояниями происходил вследствие некоторого потока событий с интенсивностью Λ, которая может быть различной для каждого перехода между состояниями. Эта интенсивность связана со средним временем T пребывания случайным процессом в предыдущем состоянии перед переходом в последующее состояние, которые являются обратными величинами: $\Lambda=1/T$. Поток событий, приводящий к смене состояний, должен быть потоком Пуассона [6].

Согласно [8], пуассоновские и близкие к ним по структуре потоки событий встречаются в строительной сфере наиболее часто. Это связано с тем, что при моделировании процессов ведения строительных работ, чаще всего идет наложение (суммирование) потоков событий различной природы или их случайное разрежение, при этом события, составляющие эти потоки, являются независимыми. Согласно предельной теореме потоков событий [5], при этом результирующий поток событий будет стремиться к потоку Пуассона. Это дает основание с высокой точностью использовать марковские случайные процессы с дискретным состоянием и непрерывным временем для динамического описания процесса управления запасами ресурсов разного вида в строительной сфере.

Кроме этого, для простоты будем считать, что интенсивности переходных потоков для смены состояний случайного процесса Λ_{ij}, где i – номер состояния, из которого осуществляется переход, а j – номер состояния, в который осуществляется переход, являются стационарными. Если же нужно рассматривать нестационарный поток Пуассона с интенсивностью $\Lambda_{ij}(t)$, то на временном интервале проведения военной операции от t_1 до t_2, можно использовать среднюю интенсивность для данного временного интервала:

$$\Lambda_{ij} = \int_{t_1}^{t_2} t \cdot \Lambda_{ij}(t)\,dt\,.$$

Перечисленные аргументы дают основания использовать случайные марковские процессы с дискретным состоянием и непрерывным временем для моделирования задачи пополнения запасов на объектах строительства.

Математическая модель

Перейдем к математической формулировки задачи.

Пусть имеется некоторый строительный объект, на котором необходимо поддерживать некоторый запас в заданном количестве. Пополнение запаса производится с некоторого склада или иного подразделения, находящегося на удалении от строительного объекта и доставка запаса требует затрат ресурсов и времени, которые ограничены.

Под запасом будем понимать средневзвешенный объем поставляемых ресурсов различной природы (строительные материалы, комплектующие, технику и т.д.), который может измеряться в физических единицах, например, в штуках, тоннах, метрах и прочем. Но, ввиду того, что доставка запаса и его расходы планируются на некоторый период (месяц, неделю, сутки), в качестве единицы измерения объема запаса рационально использовать средний объем запаса, который необходим для нормального обеспечения строительного объекта в течении единицы времени. Это допущение позволит использовать марковские процессы с дискретным состоянием [5, 7].

Введем следующие состояния системы обеспечения строительного объекта запасами, которые учитывают то, что нерационально хранить на данном строительном объекте объем запаса, необходимого более чем на 7 единиц времени. Тут стоит сделать пояснение. Выбор семи единиц времени обусловлен тем, что при реальных строительных проектах чаще всего планирование производится понедельное [8] и единицей времени являются сутки. Также, на неделю осуществляется расчет необходимых ресурсов.

Следует отметить, что предлагаемую, больше для примера, в данной работе модель легко обобщить на иные интервалы времени и их количество.

На основе вышесказанного, введем через S_i – состояние случайного процесса, соответствующее тому, что объем запаса на строительном объекте достаточно на i суток, но недостаточно на i+1 суток, i=0, 1, 2, …, 7.

Ввиду того, что доставленные запасы последовательно увеличивают номер состояния, а расход имеющихся запасов последовательно уменьшают это состояние, для моделирования рационально использовать марковские случайные процессы гибели и размножения с непрерывным временем и дискретным состоянием [5]. Перейдем к числовым показателям, характеризующим данный случайный процесс.

Процесс гибели и размножения, который описывает процесс пополнения и расходования запасов для строительных объектов, будет описываться только двумя параметрами, что значительно упрощает процесс математического моделирования, но эти параметры, в свою очередь, будут определяться множеством показателей, которые зависят от внешних и внутренних факторов, влияющих на процесс пополнения и расходования запасов. Рассмотрим эти параметры подробнее.

Параметр λ характеризует интенсивность пополнения запасов, он равен среднему объему запасов, которые необходимо подвести, чтобы увеличить запас на строительном объекте в среднем на одни сутки. Фактически его смысл заключается в отношении среднего объема завозимых запасов к необходимому объему требуемых строительному объекту запасов на одни сутки. В случае стабильного строительства без сильного влияния каких-либо условий на его течение, то есть, когда пополнение запасов в среднем равно объему израсходованных запасов, данный параметр равен единице.

Параметр μ характеризует интенсивность расходования запасов, он равен среднему расходу запасов за один период времени. В стационарных условиях, когда нет необходимости менять расход запасов, этот показатель также равен единице (что следует из определенной системы измерения запасов). В случае вмешательства случайных негативных факторов, параметр μ возрастает и модель позволит рассчитать вероятностные состояния системы.

На основании теории марковских процессов гибели и размножения и с учетом указанных допущений, составим граф состояний марковского процесса, который приведен на рис. 1.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{S_0} \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_1} \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_2} \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_3} \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_4} \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_5} \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_6} \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_7} \arrow[l, shift left, "\mu"]
\end{tikzcd}
$$

Рис. 1. Граф состояний процесса гибели и размножения

Для решения поставленной задачи, необходимо найти вероятности состояний $P_i(t),\ i = 0, 1, \ldots, 7,$ которые имеют смысл вероятность того, что в момент времени t случайный процесс будет находится в состоянии S_i.

На основании приведенного графа из рис. 1, составляется система дифференциальных уравнений Колмогорова [5, 7] вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t); \\ \dfrac{dP_i(t)}{dt} = \lambda P_{i-1}(t) + \mu P_{i+1}(t) - (\lambda + \mu) P_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, 6; \\ \dfrac{dP_7(t)}{dt} = \lambda P_6(t) - \mu P_7(t). \end{cases} \tag{1}$$

Система дифференциальных уравнений (1) является однородной и вырожденной [9], поэтому из нее можно удалить одно (любое) уравнение, заменив его условием нормировки: $\sum_{i=0}^{7} P_i(t) = 1$. Сделаем это с последним уравнением, получив невырожденную систему дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t); \\ \dfrac{dP_i(t)}{dt} = \lambda P_{i-1}(t) + \mu P_{i+1}(t) - (\lambda + \mu) P_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, 6; \\ \sum_{i=0}^{7} P_i(t) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) дополняется начальными условиями, заключающимися в том, что в начальный момент времени система находилась в состоянии S_k:

$$P_k(0) = 1;\ P_i(0) = 0;\ i = 0, 1, \ldots, 7,\ i \neq k. \tag{3}$$

Одной из основных проблем реализации данной модели является то, что неизвестно, в каком состоянии находилась система в начальный момент времени. Однако, при длительном проведении строительных работ, этот фактор не важен.

Перейдем к статической модели пополнения и расходования запасов на некотором объекте строительства, когда функционирование случайного процесса ведется длительное время и фактор наличия необходимых запасов не является определяющим в усредненном понимании.

При таком подходе, решение задачи сводится к нахождению финальных вероятностей состояний случайного процесса:

$$P_i = \lim_{t\to\infty} P_i(t);\ i = 0, 1, \dots, 7,$$

которые будут независимы от времени.

В этом случае система дифференциальных уравнений (2) с начальными условиями (3) переходит в систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} \mu P_1 = \lambda P_0; \\ \lambda P_{i-1} + \mu P_{i+1} = (\lambda + \mu) P_i,\ \ i = 1, 2, \dots, 6; \\ \sum\limits_{i=0}^{7} P_i = 1. \end{cases} \tag{4}$$

В результате алгебраических преобразований, решение трехдиагональной системы алгебраических уравнений (4) можно свести к явному решению вида [5, 10]:

$$P_0 = 1 \Big/ \sum_{m=0}^{7} \frac{\lambda^m}{\mu^m};\ \ P_n = \frac{\dfrac{\lambda^n}{\mu^n}}{\sum\limits_{m=0}^{7} \dfrac{\lambda^m}{\mu^m}} = \frac{\lambda^n}{\mu^n} P_0,\quad n = 0, 1, \dots, 7. \tag{5}$$

Как было сказано ранее, математическая модель пополнения запасов для объекта строительства будет зависеть от двух параметров: λ - интенсивность пополнения запасов и μ - интенсивность расхода запасов. Однако, решение (5) показывает, что модель можно свести к одному параметру $\rho = \lambda / \mu$, который имеет смысл отношения скорости пополнения запаса к скорости его расхода. Данный показатель ρ обычно в теории массового обслуживания [6] называется приведенной интенсивностью пополнения запасов. С учетом данного параметра, выражение (5) примет вид:

$$P_0 = 1 \Big/ \sum_{m=0}^{7} \rho^m; \quad P_n = \frac{\rho^n}{\sum_{m=0}^{7} \rho^m} = \rho^n P_0, \quad n = 0,1,\ldots,7. \tag{6}$$

Однако, для анализа вероятности поддержания объекта строительства в необходимом состоянии с точки зрения имеющихся ресурсов, необходимо определить вероятности того, что на нем присутствуют запасы не менее, чем на K временных периодов, в нашем примере, суток. Данные вероятности, согласно (6), можно вычислить по формулам:

$$P_K = \frac{1}{\sum_{m=0}^{7} \rho^m} \cdot \sum_{m=K}^{7} \rho^m = P_0 \sum_{m=K}^{7} \rho^m, \quad K = 0,1,\ldots,7. \tag{7}$$

В результате проведения решения для различных приведенных интенсивностей и для разных сроков до последующего пополнения запаса, были получены следующие результаты.

Анализ решения

Проанализируем полученное решение. Для этих целей приведем зависимости вероятности необходимого количества запасов на строительных объектах на заданные количества временных периодов, как функции от приведенной интенсивности $\rho = \lambda / \mu$.

Очевидно, что при K=0, что соответствует вероятности того, что запасов на строительном объекте хватит более, чем на 0 суток, эта вероятность равна единице, что соответствует достоверному событию. С ростом количества суток K, на которые будет обеспечен запас ресурса, вероятность его обеспечения будет падать. Также, увеличение параметра ρ, который регулирует скорости поставки и расходования запасов, вероятность надежного обеспечения запасами строительных объектов, будет расти.

На рис. 1 представлены зависимости вероятностей необходимого количества запасов на строительном объекте в объеме, достаточном на период от 1 до 3 суток, а на рис. 2 приведены эти же зависимости для временных периодов от 4 до 7 суток.

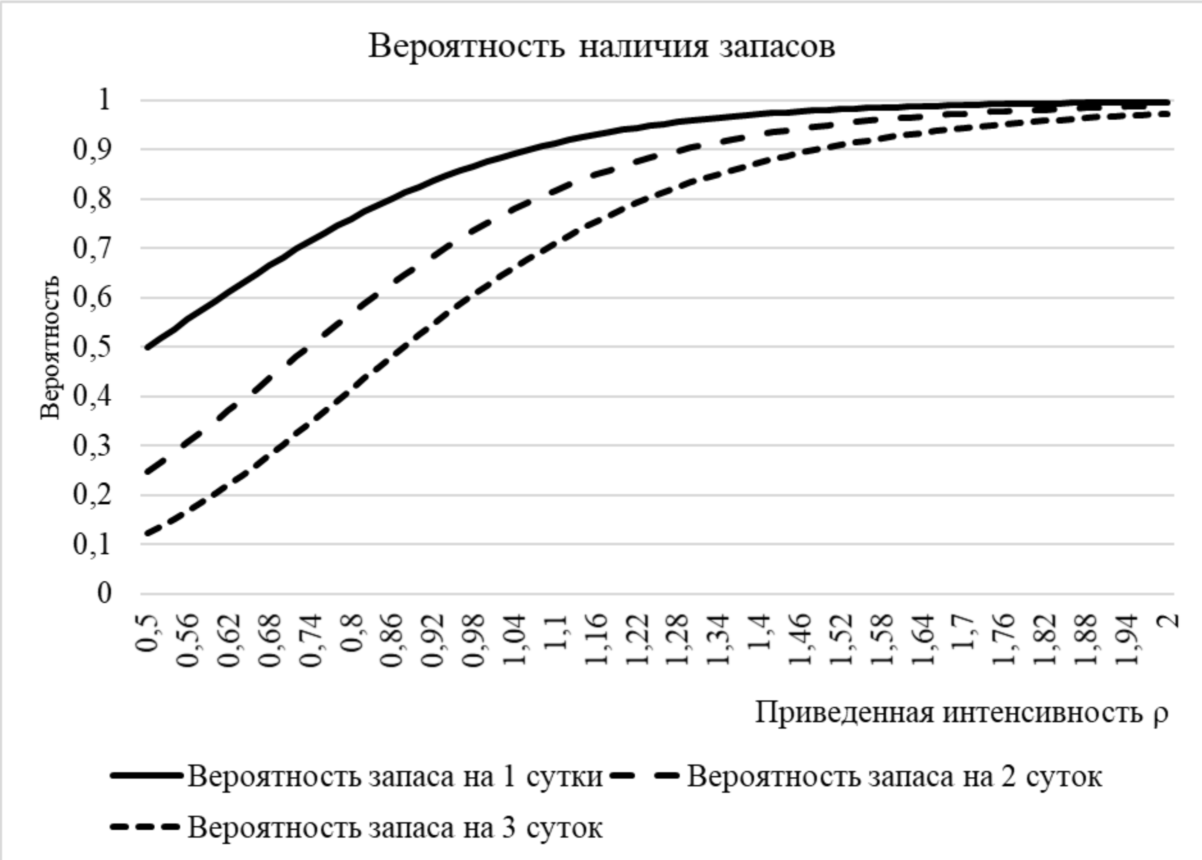

Рис. 1. – Вероятности зависимости запасов на строительном объекте на период от 1 до 3 суток, как функции от приведенной интенсивности ρ.

Таким образом, как и следовало ожидать, вероятность отсутствия дефицита ресурса растет с увеличением приведенной интенсивности и с уменьшением срока последующего пополнения запаса.

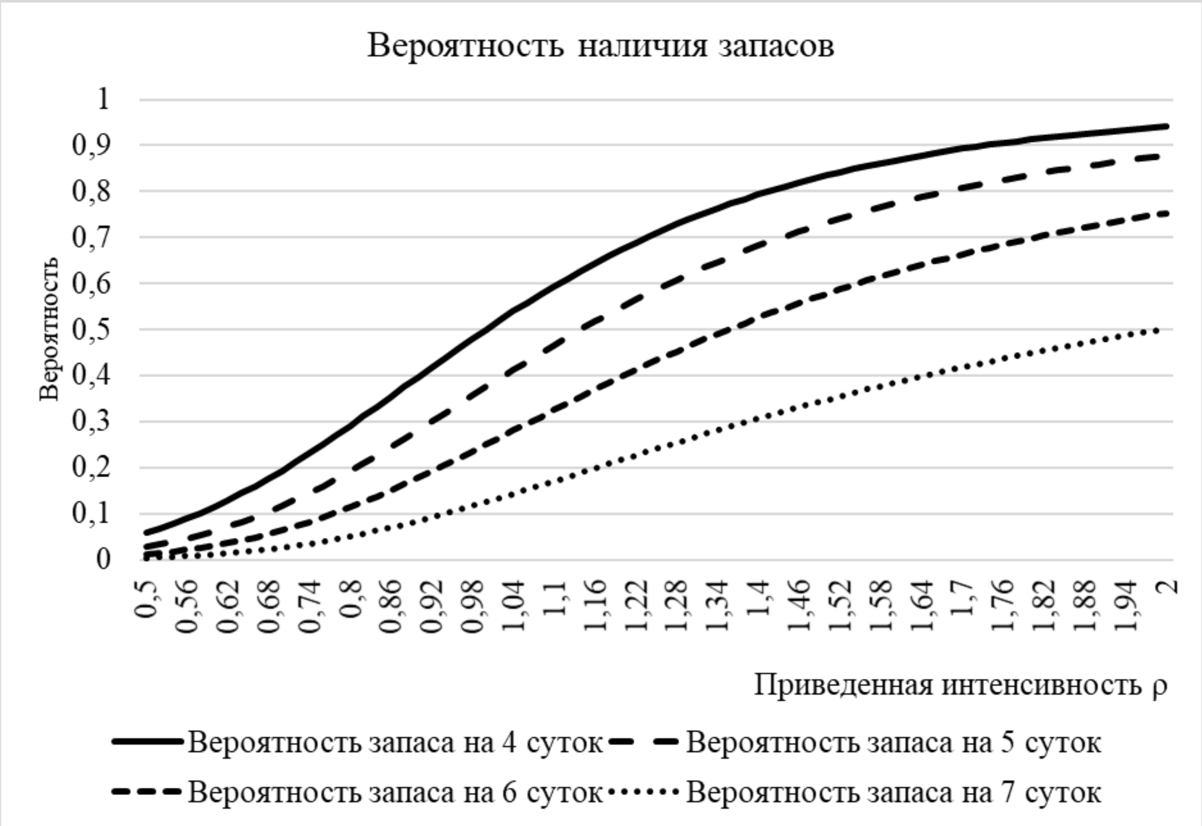

Рис. 2. – Вероятности зависимости запасов на строительном объекте на период от 4 до 7 суток, как функции от приведенной интенсивности ρ.

Заключение

Таким образом, была описана основанная на марковских случайных процессах математическая модель, позволяющая в вероятностном подходе оценить наличие необходимых ресурсов на строительных объектах в ближайшие периоды времени.

Данная модель позволит осуществлять оперативное управление запасами строительных объектов в условиях нестабильного их снабжения и расходования, а также планировать действия по мероприятиям, позволяющим увеличить объем поставляемых запасов на объекты в зависимости от скорости их расходования с учетом влияния внешних условий и внутренних факторов.

Литература

1. Колпачев В.Н., Семенов П.И., Михин П.В. Оптимизация календарного плана при ограниченных ресурсах. // Известия ТГУ. Серия «Строительство и архитектура». Тула. 2004. Вып. 7. С. 154-164.

2. Баркалов С.А., Глушков А.Ю., Моисеев С.И. Динамическая модель разработки и реализации проекта под влиянием внешних факторов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2020. Т. 20. № 3. С. 76–84.

3. Azadivar, F.; Rangarajan, A. (2016). "10.6 Inventory Management in Practice". In Ravindran, A.R. (ed.). Operations Research and Management Science Handbook. CRC Press. pp. 10-34–10-35. ISBN 9781420009712.

4. Waller, M.A.; Esper, T.L. (2014). The Definitive Guide to Inventory Management: Principles and Strategies for the Efficient Flow of Inventory Across the Supply Chain. Pearson Education. pp. 150–1. ISBN 9780133448825.

5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. - М.: Высш. шк. 1998. 354 с.

6. Маталыцкий М.А. Элементы теории случайных процессов: учеб. пособие. Гродно: ГрГУ. 2004. 326 с.

7. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит. 2002. 320 с.

8. Barkalov S.A., Kurochka P.N. Model for Determining the Term of Execution of Sub-conflicting Works / Proceedings of Tenth International Conference “Management of Large-scale System Development” (MLSD) 2017. P. 8109598

9. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО. 2012. 344 с.

10. Баркалов С.А., Моисеев С.И., Порядина В.Л. Модели и методы в управлении и экономике с применением информационных технологий: учебное пособие. СПб.: Интермедия. 2017. 264 с.

References

1. Kolpachev V.N., Semenov P.I., Mikhin P.V. Izvestiya TGU. Seriya «Stroitel'stvo i arkhitektura». Tula. 2004. V. 7. pp. 154-164.

2. Barkalov S.A. Glushkov A.Yu., Moiseev S.I. Vestnik YUUrGU. Seriya «Komp'yuternyye tekhnologii, upravleniye, radioelektronika». 2020. V. 20. № 3. pp. 76–84.

3. Azadivar, F.; Rangarajan, A. (2016). "10.6 Inventory Management in Practice". In Ravindran, A.R. (ed.). Operations Research and Management Science Handbook. CRC Press. pp. 10-34–10-35.

4. Waller, M.A.; Esper, T.L. (2014). The Definitive Guide to Inventory Management: Principles and Strategies for the Efficient Flow of Inventory Across the Supply Chain. Pearson Education. pp. 150–1.

5. Ventzel E.S., Ovcharov L.A. Teoriya sluchaynykh protsessov i yeye inzhenernyye prilozheniya [The Theory of Random Processes and its Engineering Applications]. Moskva: Higher School. 1998. 354 pp.

6. Matalytsky M.A. Elementy teorii sluchaynykh protsessov: uchebnoye posobiye [Elements of the Theory of Random Processes: Tutorial]. Grodno: Publishing House of the State University. 2004. 326 pp.

7. Miller B.M., Pankov A.R. Teoriya sluchaynykh protsessov v prime-rakh i zadachakh [The Theory of Random Processes in Examples and Problems]. Moskva: Fizmatlit. 2002. 320 pp.

8. Barkalov S.A., Kurochka P.N. Model for Determining the Term of Execution of Sub-conflicting Works/ Proceedings of Tenth International Conference “Management of Large-scale System Development” (MLSD) 2017. P. 8109598

9. Arnold V.I. Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya [Ordinary Differential Equations]. Moskva. ICMMO. 2012. 344 pp.

10. Barkalov S.A., Moiseev S.I., Poryadina V.L. Modeli i metody v upravlenii i ekonomike s primeneniyem informatsionnykh tekhnologiy: uchebnoye posobiye [Models and methods in management and economics with the use of information technology: textbook]. St. Petersburg: Intermedia. 2017. 264 pp.