



## Расчет металлических гофрированных конструкций как конструктивно ортотропных

*М.С. Турко, А.С. Чепурненко, Б.М. Языев*

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

**Аннотация:** В статье рассматриваются вопросы перехода от гофрированных пластин и оболочек к гладким конструкциям эквивалентной жесткости. Приводится выражение для потенциальной энергии деформации бесконечно малого элемента эквивалентной гладкой оболочки, формулы, устанавливающие связь между внутренними усилиями и обобщенными деформациями гофрированной конструкции. Проводится обзор формул эквивалентных жесткостей гофрированной оболочки при изгибе, представленных в работах различных авторов. С целью выбора зависимостей, обеспечивающих наименьшую погрешность при замене гофрированной оболочки гладкой выполняется численный эксперимент в конечно-элементном комплексе ЛИРА. Расчет конструктивно ортотропной конструкции производится численно методом конечных разностей. Также установлено, что в монографии С.Г. Лехницкого содержится некорректная формула для момента инерции синусоидального гофра.

**Ключевые слова:** гофрированные конструкции, пластины и оболочки, метод конечных элементов, метод конечных разностей, ортотропия, эквивалентные жесткости.

В настоящее время возможности современных конечно-элементных расчетных комплексов позволяют определять напряженно-деформированное состояние металлических гофрированных конструкций (МГК) путем разбиения каждого гофра на плоские оболочечные или объемные элементы, однако это требует значительных вычислительных ресурсов, особенно если конструкция состоит из большого числа волн: сотен или тысяч. Возможным способом снижения затрат машинного времени при расчете МГК является замена их гладкими пластинами/оболочками эквивалентной жесткости.

К одним из последних публикаций, в которых проводится обзор выражений для эквивалентных жесткостей, относится работа [1]. Потенциальная энергия деформации элементарного элемента гофрированной оболочки авторами статьи [1] представляется в виде:

$$W = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{array} \right\}^T \left[ \begin{array}{cccccc} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{array} \right\}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$  – так называемые обобщенные деформации, которые включают в себя деформации срединной поверхности, а также изменения кривизн,  $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}$  – жесткости при растяжении/сжатии,  $D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}$  – жесткости элемента оболочки при изгибе. Коэффициенты  $B_{ij}$  отличны от нуля только для несимметричного гофра.

Для симметричного гофра связь между внутренними усилиями и обобщенными деформациями представляется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x \\ M_y \\ H \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ S \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}, \quad (2)$$

где  $M_x, M_y$  – изгибающие моменты;  $H$  – крутящий момент;  $N_x, N_y$  – продольные силы,  $S$  – сдвигающая сила.

В статье [1] при определении эквивалентных жесткостей используются следующие обозначения:  $x$  – координатная ось в направлении гофра,  $\varepsilon$  – длина проекции одной волны на ось  $x$  (рис. 1). Также вводится безразмерная координата  $X = x/\varepsilon$ , изменяющаяся в пределах одной волны в интервале от  $-1/2$  до  $1/2$ . Для произвольной функции  $f(X)$ , вводится понятие среднего значения  $\langle f \rangle$ , определяемого по формуле:

$$\langle f \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} f(X) dX. \quad (3)$$

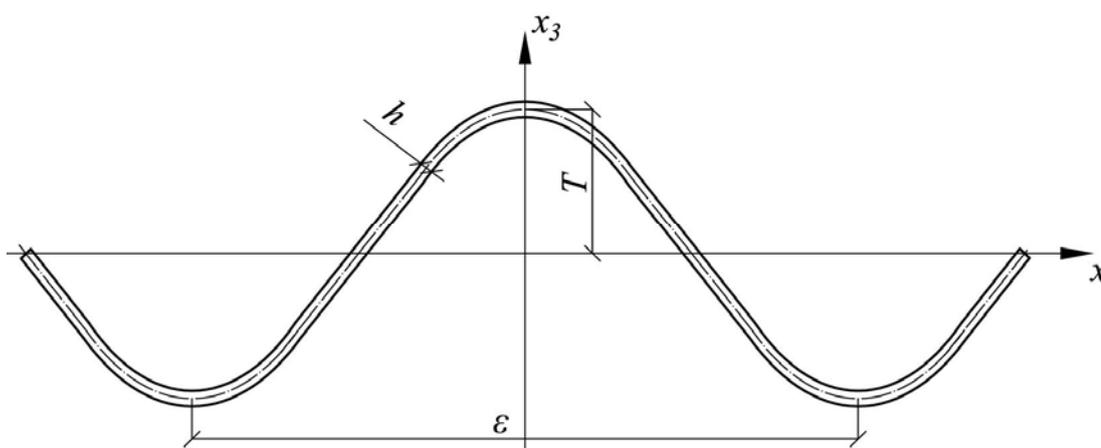


Рис. 1. – Геометрия гофра

Форма гофра задается уравнением  $x_3 = x_3(X)$ . Также вводятся следующие величины:

$$\phi(X) = x_3(X) / \varepsilon; \quad \varphi = \frac{dx_3(x)}{dx} = \frac{d\phi(X)}{dX}; \quad a = 1 + \varphi^2. \quad (4)$$

Длину дуги  $S$  одной волны и момент инерции  $I$  можно вычислить по формулам:

$$S = \varepsilon \langle \sqrt{a} \rangle; \quad I = h\varepsilon^2 \langle \phi^2 \sqrt{a} \rangle, \quad (5)$$

где  $h$  – толщина листа.

Первая публикация, в которой рассматривался вопрос замены гофрированных пластин эквивалентными ортотропными, принадлежит М. Губеру. На основе работы М. Губера Е. Зейделем были предложены следующие формулы для жесткостей  $D_{ij}$  [2]:

$$D_{11} = \frac{\varepsilon}{S} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad D_{12} = 0; \quad D_{22} = EI; \quad D_{66} = \frac{S}{\varepsilon} \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}. \quad (6)$$

В работах [3-5] величины  $S$  и  $I$  были вычислены для различной формы гофра. В публикациях отечественных ученых, в том числе [6-8], для расчета конструкций с синусоидальным гофром ( $x_3 = T \sin(2\pi x / \varepsilon)$ ) использовались формулы, предложенные С.Г. Лехницким [3]:

$$S = \varepsilon \left( 1 + \frac{\pi^2 T^2}{\varepsilon^2} \right); I = 0.5hT^2 \left[ 1 - \frac{0.81}{1 + 2.5(T/\varepsilon)^2} \right]. \quad (7)$$

Еще один вариант формул для эквивалентных изгибных жесткостей, учитывающий коэффициент Пуассона был предложен D. Briassoulis [9]:

$$D_{11} = \frac{\varepsilon}{S} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; D_{12} = \nu D_{11}; D_{22} = \frac{EhT^2}{2} + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; D_{66} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}. \quad (8)$$

В статье [10] жесткости  $D_{11}$  и  $D_{12}$  предлагается определять как и в [9], а для жесткостей  $D_{22}$  и  $D_{66}$  получены следующие формулы:

$$D_{22} = \frac{EI}{1-\nu^2} + \left\langle \frac{1}{\sqrt{a}} \right\rangle \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; D_{66} = \frac{S}{\varepsilon} \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}. \quad (9)$$

В [1] для величин  $D_{22}$  и  $D_{66}$  выведены следующие формулы:

$$D_{22} = EI + \frac{Eh^3}{12} \left\langle \frac{1}{\sqrt{a}} \right\rangle + \nu^2 D_{11}; D_{66} = \frac{\mu h}{4} \left\langle \frac{\sqrt{a}}{3} h^2 - \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{h^4 \varphi'^2}{1 + \frac{12^2 \varepsilon^2 a^2}{48 \varepsilon^2 a^3}} \right\rangle, \quad (10)$$

где  $\mu = G = E / (2(1+\nu))$ .

Значения  $D_{11}$  и  $D_{12}$  в [1] предлагается вычислять, как и в [9]. Если отбросить в (10) величины более высокого порядка малости, то выражения для  $D_{22}$  и  $D_{66}$  совпадут с формулами, предложенными Е.Зейделем.

С целью выбора расчетных формул, дающих наименьшие погрешности при переходе от гофрированных конструкций к эквивалентным гладким, нами был выполнен численный эксперимент. В конечно-элементном расчетном комплексе Лира-САПР 2013 была смоделирована шарнирно опертая по контуру гофрированная пластинка, к которой была приложена равномерно распределенная по площади проективная нагрузка  $q = 1$  кПа. Размеры конструкции в плане  $2 \times 2$  м, гофр принимался синусоидальным с геометрическими характеристиками  $\varepsilon = 0.2$  м,  $T = 0.0275$  м,  $h = 0.005$  м.

Для расчета этой же конструкции как конструктивно ортотропной использовалось дифференциальное уравнение вида:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y), \quad (11)$$

где  $q(x, y)$  – поверхностная нагрузка,  $w$  – прогиб,  $D_3 = 2D_{66} + D_{12}$ .

Значения  $I$  и  $S$  вычислялись нами путем численного интегрирования, в результате чего были получены величины  $S = 1.17\epsilon$ ,  $I = 2.05 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$ . Отметим, что формулы С.Г. Лехницкого (7) дают корректный результат для  $S$  ( $S = 1.19\epsilon$ ), но момент инерции оказался заниженным в 5.7 раз ( $I = 3.59 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4$ ).

При расчете в программном комплексе ЛИРА-САПР 2013 с учетом реальной геометрии конструкции получено значение максимального прогиба  $w_{\max} = 0.529 \text{ мм}$ . Изополя вертикальных перемещений приведены на рис. 2. Наиболее близкой к этому значению, оказалась величина, вычисленная на основе формул Ye. Zheng [1]. Приемлемый результат дают также формулы Е. Зейделя. Сравнение максимальных перемещений, вычисленных на основе формул авторов [1-2,9-10] с результатом, полученным в ПК ЛИРА, представлено в таблице 1.

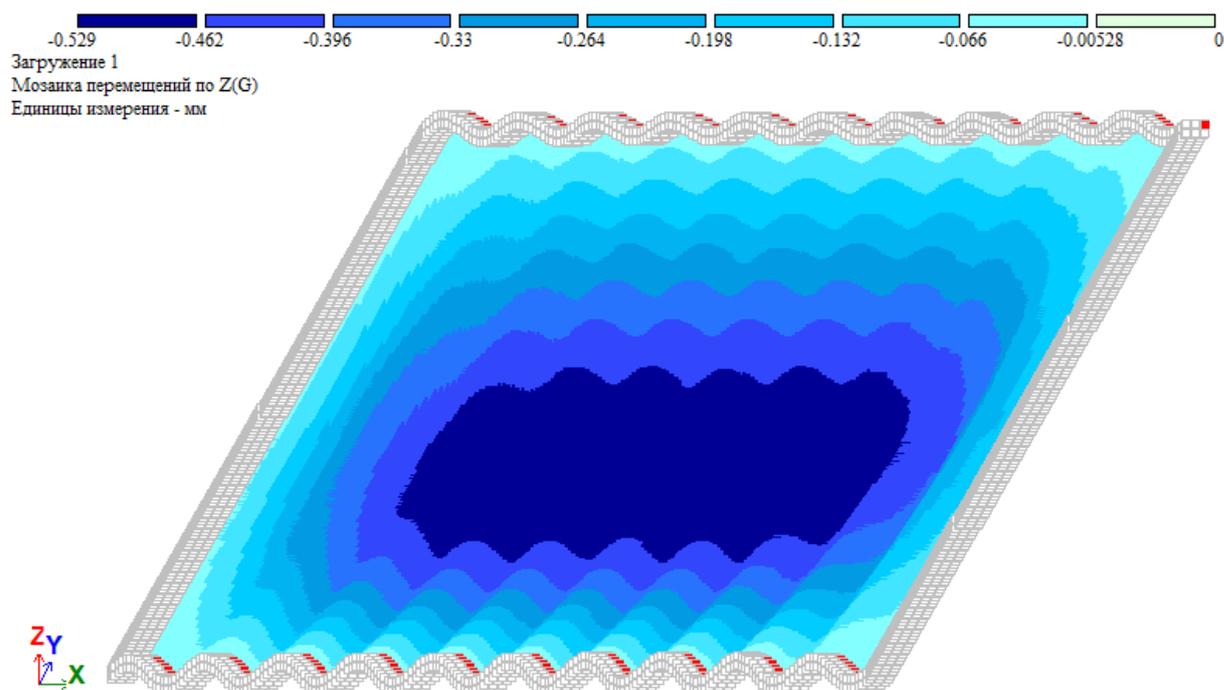


Рис. 2. – Изополя вертикальных перемещений

Таблица № 1

Сравнение максимальных прогибов, полученных с использованием формул различных авторов

	ПК ЛИРА	Е. Зейдель [2]	D. Briassoulis [9]	Y. Xia [10]	Ye. Zheng [1]
$w_{max}$ , мм	0.529	0.534	0.574	0.482	0.532

### Литература

1. Zheng Ye., Berdichevsky V.L., Wenbin Yu. An equivalent classical plate model of corrugated structures // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51. pp. 2073-2083.
2. Seydel E. Shear buckling of corrugated plates // Jahrbuch die Deutschen Versuchsanstalt fur Luftfahrt. 1931. №9. pp. 233–245.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Гостехиздат, 1957. 463 с.

4. Szilard R. Theory and Analysis of Plates. Prentice-Hall, 1974. 532 p.
5. Lau J.H. Stiffness of corrugated plate // J. Eng. Mech. Div. 1981. Vol. 107. pp. 271–275.
6. Кадомцева Е.Э., Сикачева Н.В., Кирсанов Ю.А. Расчёт на прочность гофрированной тонкой пластины на упругом основании обратным методом // Инженерный вестник Дона, 2017, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2017/4251.
7. Лукин А.О. Определение прогибов балок с гофрированной стенкой с учетом сдвиговых деформаций // Инженерный вестник Дона, 2013, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1496
8. Beskopylny A.N., Kadomtseva E.E., Strelnikov G.P. The Boundary Condition Influence on a Stress-Strain State of a Corrugated Plate on an Elastic Foundation // Materials Science Forum. 2018. Vol. 931. pp. 60-65
9. Briassoulis D. Equivalent orthotropic properties of corrugated sheets // Comput. Struct. 1986. №23. pp. 129–138.
10. Xia Y., Friswell M.I., Saavedra Flores E.I. Equivalent models of corrugated panels // International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49 (13). pp. 1453–1462.

### References

1. Zheng Ye., Berdichevsky V.L., Wenbin Yu. International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51. pp. 2073-2083.
  2. Seydel E. Jahrbuch die Deutschen Versuchsanstalt fur Luftfahrt. 1931. №9. pp. 233–245.
  3. Lekhnitsky S.G. Anizotropnyye plastinki [Anisotropic plates]. Moscow: Gostekhizdat, 1957. 463 p.
  4. Szilard R. Theory and Analysis of Plates. Prentice-Hall, 1974. 532 p.
  5. Lau J.H. J. Eng. Mech. Div. 1981. Vol. 107. pp. 271–275.
-



6. Kadomtseva E.E., Sikacheva N.V., Kirsanov Yu.A. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2017, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2017/4251](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2017/4251).
7. Lukin A.O. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1496](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1496)
8. Beskopylny A.N., Kadomtseva E.E., Strelnikov G.P. Materials Science Forum. 2018. Vol. 931. pp. 60-65
9. Briassoulis D. Comput. Struct. 1986. №23. pp. 129–138.
10. Xia Y., Friswell M.I., Saavedra Flores E.I. International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49 (13). pp. 1453–1462.