Инженерный вестник Дона, №1 (2018)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4713

Аппроксимирующая функция надежности конструкций покрытий зданий

С. В. Скачков, А. А. Башкатова, Г. Э. Муро

Академия строительства и архитектуры. Донской Государственный Технический Университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: рассматривается вопрос определения аппроксимирующей функции прогибов строительных конструкций с использованием метода наименьших квадратов.
Ключевые слова: аппроксимирующая функция, метод наименьших квадратов, прогибы конструкций, прогнозирование деформаций, деформации конструкций.

Вопрос о надежности строительных конструкций возник с самого зарождения строительной техники, но долгое время эта характеристика не оценивалась количественной мерой, а рассматривалась как одна из сторон качества конструкций. [1]

В настоящее время возрастают требования и к методам диагностики состояния объектов – они должны давать возможность быстро и в полной мере оценить действительные характеристики конструкций зданий, а также быть просты и мобильны, чтобы использоваться на любом этапе создания и эксплуатации здания или сооружения. [2,3]

Исходя из обобщения накопленного опыта и опыта зарубежных коллег [4,5], можно сделать вывод о том, что традиционные методы расчетов на прочность не дают возможности в полной мере решить вопрос о надежности конструкций. [6]

Отказ любого элемента конструкций оценивается вероятностью их разрушения. [7] В связи с этим применяют вероятностный подход, который позволяет более полно учесть возникающие факторы.

Методы описания и анализа экспериментальных данных, полученных при наблюдении случайных явлений, составляют основной предмет изучения математической статистики. Проводят сопоставление экспериментальных данных с принятым законом распределения. Возникает задача выравнивания статистического ряда, которая переходит в задачу рационального выбора тех значений параметров распределения, при которых соответствие между статистическими и теоретическими распределениями оказывается наилучшим. При сглаживании экспериментальных зависимостей часто применяют метод наименьших квадратов.

В данной работе рассматривается вопрос определения аппроксимирующей функции прогибов строительных конструкций и ее построение.

Существует метод наименьших квадратов, который часто используется при обработке экспериментальных результатов для аппроксимации (приближения) данных эксперимента аналитической формулой.

Конкретный вид формулы определяется исходя из физических соображений. Такими формулами могут быть:

$y=ax+b$,

$y=ax^2+bx+c$,

$y=a_nx^2+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$,

$y=ae^{bx}+c$,

и другие. [8]

Основная сущность метода наименьших квадратов состоит в следующем.

Пусть результаты измерений прогибов конструкции представлены таблицей.

Таблица 1

Результаты измерений прогибов конструкции

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Будем считать, что вид аппроксимирующей функции зависимости прогибов от времени выбран, и ее можно записать в следующем виде:

$y=f(x,a_0,a_1, \ldots\ a_m),\ m \leq n-1$ (1)

где f - известная функция, a_0, a_1, …, a_m - неизвестные постоянные параметры, значения которых надо найти.

В используемом методе наименьших квадратов приближение функции (1) к экспериментальной зависимости считается наилучшим, если выполняется данное условие:

$Q=Q(a_0, a_1, \ldots, a_m)=\sum v_i^2=\sum(y_i-f(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_m))^2=\min,$ (2)

то есть сумма квадратов отклонений искомой аналитической функции от экспериментальной зависимости должна быть минимальна.

Заметим также, что функция Q называется невязкой.

Так как невязка Q удовлетворяет условию:

$Q=Q(a_0, a_1, \ldots, a_m)=\sum v_{i2} \geq 0,$ (3)

то она имеет минимум.

Необходимым условием минимума функции нескольких переменных является равенство нулю всех частных производных данной функции по параметрам.

Таким образом, определение наилучших значений параметров аппроксимирующей функции (1), то есть таких их значений, при которых $Q = Q(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ минимальна, сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a_0} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial a_1} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial a_m} = 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Методу наименьших квадратов можно также дать геометрическое истолкование: среди бесконечного семейства линий данного вида отыскивается одна линия, для которой сумма квадратов разностей ординат экспериментальных точек и соответствующих им ординат точек, найденных по уравнению этой линии, будет наименьшей. [9]

Если аппроксимирующей функцией зависимости прогибов конструкции от времени является квадратичная зависимость, то её параметры a, b, c определяют из условия минимума функции:

$$Q(a,b,c)=\sum(y_i-(ax_i^2+bx_i+c))^2=\sum(y_i-ax_i^2-bx_i-c))^2. \quad (5)$$

Условия минимума искомой функции сводятся к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a_0} = 2\sum\left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right)^2\left(-x_i^2\right) =- 2\sum\left(x_i^2 y_i - ax_i^4 - bx_i^3 - cx_i^2\right)^2 = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial a_1} = 2\sum\left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right)^2\left(-x_i\right) =- 2\sum\left(x_i y_i - ax_i^3 - bx_i^2 - cx_i\right) = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial a_m} = 2\sum\left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right)^2(-1) =- 2\sum\left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

После выполненных преобразований получаем систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i \\ a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i + cn = \sum y_i \end{cases}, \quad (5)$$

при решении которой находим искомые значения параметров a, b и c. [10]

Используя полученные значения данных параметров определяется аппроксимирующая функция зависимости прогибов конструкции от времени. Производится построение графика функции.

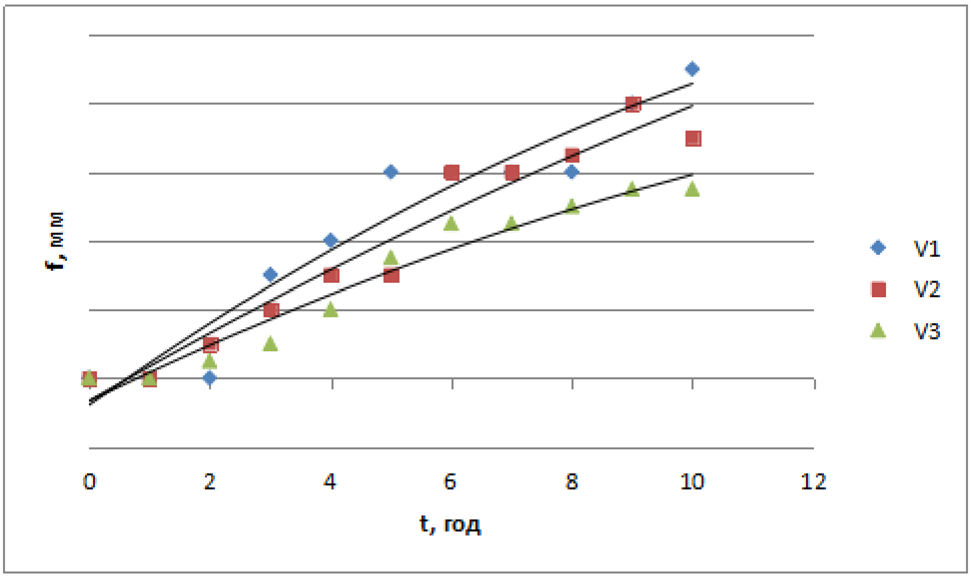

Рис. 1 График аппроксимирующей функции зависимости прогибов конструкции f от времени t

V1, V2, V3 - скорости нарастаний деформаций конструкций с течением времени, мм/год.

Аппроксимирующая функция может быть использована при прогнозировании развития прогибов конструкции при дальнейшей эксплуатации.

Литература

1. Острейковский В. А. Теория надежности: Учебник для ВУЗов - М.: Высш. шк., 2003. - 463 с.

2. Калинин В.М., Сокова С.Д. К17 Оценка технического состояния зданий: Учебник. М.: ИНФРА-М, 2010, 268 с. (Среднее профессиональное образование).

3. Скачков С. В., Луптаков Р.И. Использование требований и норм для расчета на прогрессирующее обрушение // Инженерный вестник Дона, 2017, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4159

4. Building Failures, Diagnosis & Avoidance, 2d Ed., W.H. Ransom, E.& F. Spoon, New York, 1987 ISBN 0-419-14270-3 - 190 p.

5. Mitchell T. R., James L. R. Building better theory: Time and the specification of when things happen //Academy of Management Review. – 2001. – V. 26. – №. 4. – pp. 530-547.

6. Е.В. Стасева, Е.В. Федина Системный подход к мониторингу технического состояния зданий и сооружений // Инженерный вестник Дона 2013, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2172

7. Пшеничкин А.П. Вероятностный расчет бескаркасных жилых зданий на неоднородно деформируемых основаниях // Известия вузов. Строительство. - № 12. - 2013. - С. 109-114.

8. Колемаев В. А. Эконометрика: учебник. - М. : ИНФРА-М, 2017 - 160 с. - (Высшее образование: Бакалавриат).

9. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. Учебник. — М.: ЮНИТИ-ДАНА — 3-е издание, перераб. и доп. — 2010. — 328 с. — (Серия «Золотой фонд российских учебников»).

10. Горянинов В. Б., Павлов И. В., Цветкова Г. М. и др. Математическая статистика. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.— 424 с. (Сер. Математика в техническом университете. Вып. XVII).

References

1. Ostrejkovskij V. A. Teorija nadezhnosti: Uchebnik dlja VUZov [Theory of reliability: textbook for Universities]. M.: Vyssh. shk., 2003. 463 p.

2. Kalinin V.M., Sokova S.D. K17 Ocenka tehnicheskogo sostojanija zdanij [assessment of technical condition of buildings]: Uchebnik. M.: INFRA-M, 2010, 268 p. (Srednee professional'noe obra-zovanie).

3. Skachkov S. V., Luptakov R.I. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2017, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4159.

4. Building Failures, Diagnosis & Avoidance, 2d Ed., W.H. Ransom, E.& F. Spon, New York, 1987 ISBN 0-419-14270-3. 190 p.

5. Mitchell T. R., James L. R. Building better theory: Time and the specification of when things happen Academy of Management Review. 2001. V. 26. №4 pp. 530-547.

6. E.V. Staseva, E.V. Fedina. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2172.

7. Pshenichkin A.P. Izvestija vuzov. Stroitel'stvo. № 12. 2013. pp. 109-114.

8. Kolemaev V. A. Jekonometrika [Econometrics]: uchebnik. M.: INFRA-M, 2017. 160 p. (Vysshee obrazovanie: Bakalavriat).

9. Kremer N.Sh., Putko B.A. Jekonometrika [Econometrics]. Uchebnik. M.: JuNITI-DANA 3-e izdanie, pererab. i dop. 2010. 328 p. (Serija «Zolotoj fond rossijskih uchebnikov»).

10. Gorjaninov V. B., Pavlov I. V., Cvetkova G. M. i dr. Matematicheskaja statistika [Math statistics]. M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana, 2001. 424 p. (Ser. Matematika v tehnicheskom universitete. Vyp. XVII).