

## Построение и исследование математической модели автономного необитаемого подводного аппарата

*Б.В. Гуренко*

*Южный федеральный университет, Таганрог*

**Аннотация:** В работе предлагается подход к построению математической модели автономного необитаемого подводного аппарата с учетом гидродинамических свойств, которые были получены путем электронной продувки корпуса. Данный тип аппарата имеет торпедообразную форму с одним движителем с управляемым вектором тяги и двумя (горизонтальное и вертикальное) подруливающими устройствами, расположенными в носовой части.

**Ключевые слова:** математическая модель, подводный аппарат, необитаемый аппарат, робототехника

### Введение

Современные подводные аппараты способны выполнять широкий круг задач, в который входят экологических и климатический мониторинг, океанологические исследования, обслуживание глубоководных систем и устройств подводных мест, поиск подводных месторождений, охрана акваторий и др. Все эти задачи могут быть наиболее эффективно решены в классе автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА). Причина заключается в снижении стоимости эксплуатации и вероятности ошибки за счет уменьшения степени участия человека-оператора, повышения времени непрерывной работы мобильных систем, уменьшение массогабаритных параметров техники и другие. Однако для проектирования и создания системы управления такого сложного объекта, необходимо построить математическую модель, которая смогла бы в полной мере учесть всю нестационарность параметров, нелинейность динамики и многосвязность подводного аппарата (ПА), как объекта управления, с учетом всех сил взаимодействия корпуса с вязкой средой.

## Формулы Математическая модель подводного аппарата

Для вывода математической модели ПА будем использовать две прямоугольные системы координат, показанные на рис. 1. Математическая модель ПА, на базе известных уравнений твердого тела, в матричной форме может быть представлена в следующем векторно-матричном виде:

$$\dot{\bar{Y}} = \Sigma(\bar{\theta}, \bar{X}) = \Sigma \begin{pmatrix} \Sigma_p(\bar{\theta}, \bar{X}) \\ \Sigma_\theta(\bar{\theta}, \bar{X}) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\tilde{M}\dot{\bar{X}} = [\bar{F}_d(\bar{P}, \bar{V}, \bar{\omega}) + \bar{F}_u(\bar{\delta}) + \bar{F}_v(G, A_{II}, R_I)] \quad (2)$$

$$T_{iy} \frac{d\bar{\delta}}{dt} + \bar{\delta} = \bar{\Psi}_{iy}(\bar{\delta}, \bar{U}), \quad (3)$$

где  $T_{iy}$  и  $\bar{\Psi}(\bar{\delta}, \bar{U})$  – диагональная матрица постоянных времени ИУ и вектор нелинейных функций правых частей уравнений исполнительных устройств;  $\bar{\delta}$  – вектор управляющих воздействий на элементы АНПА, формируемых исполнительными устройствами;  $\bar{U}$  – вектор управлений, формируемых системой управления АНПА. где  $x$  –  $m$ -вектор внутренних координат (координат состояния);  $M$  –  $(m \times m)$ -матрица массо-инерционных параметров, элементами которой являются масса, моменты инерции, присоединенные массы АНПА;  $F_u(x, Y, \delta, l)$  –  $m$ -вектор управляющих сил и моментов, здесь  $l$  – вектор конструктивных параметров;  $F_d(x, Y, l)$  –  $m$ -вектор нелинейных элементов динамики АНПА;  $F_v$  –  $m$ -вектор измеряемых и неизмеряемых внешних возмущений;  $Y = (P, \Theta)^T$  –  $n$ -вектор положения  $P$  и ориентации  $\Theta$  (выходных координат) связанной системы координат относительно базовой,  $n \leq 6$ ;  $\Sigma(\Theta, x)$  –  $n$ -вектор кинематических связей;  $\Sigma_p(\Theta, x)$  – вектор линейных скоростей связанной системы координат относительно базовой;  $\Sigma_\theta(\Theta, x)$  – вектор угловых скоростей связанной системы координат относительно базовой.

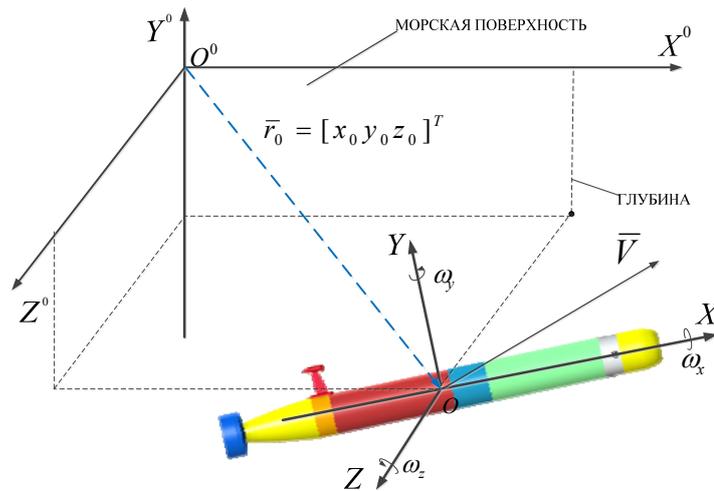


Рис. 1 – Системы координат  $K(OX^0Y^0Z^0)$  и  $K(OX Y Z)$

### Расчет гидродинамических коэффициентов и присоединенных масс

Выражения для расчета гидродинамических коэффициентов и присоединенных масс имеют вид:

$$\begin{aligned}
 F_x &= k \cdot (cx_0 + cx_V \cdot V_0 + cx_{a_2} \cdot \alpha_0^2 + cx_{b_2} \cdot \beta_0^2), \\
 F_y &= k \cdot (V_0^2 \cdot (cy_0 + cy_a \cdot \alpha_0 + cy_{a_3} \cdot \alpha_0^3 + cy_{a_2} \cdot \alpha_0 \cdot |\alpha_0| + cy_b \cdot |\beta_0| + cy_{b_2} \cdot \beta_0^2) + V_0 \cdot 1,02 \cdot \omega_z), \\
 F_z &= k \cdot (V_0^2 \cdot (cz_b \cdot \beta_0 + cz_{b_2} \cdot \beta_0 \cdot |\beta_0| + cz_{b_3} \cdot \beta_0 \cdot \beta_0^2 + cz_{ab_2} \cdot \beta_0 \cdot |\alpha_0|) + V_0 \cdot (-1,19 \cdot \omega_y)), \\
 M_x &= k_m \cdot (V_0^2 \cdot (mx_b \cdot \beta_0 + mx_{ab} \cdot \beta_0 \cdot \alpha_0 + 0 \cdot \omega_x + mx_{ab_2} \cdot \alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot |\beta_0|) + V_0 \cdot (-0,090 \cdot 1 \cdot \omega_x)), \\
 M_y &= k_m \cdot (V_0^2 \cdot (my_b \cdot \beta_0 + my_{b_2} \cdot \beta_0 \cdot |\beta_0|) + V_0 \cdot (-1,23 \cdot 1 \cdot \omega_y)), \\
 M_z &= k_m \cdot (V_0^2 \cdot (mz_0 + mz_a \cdot \alpha_0 + mz_{a_2} \cdot \alpha_0 \cdot |\alpha_0| + mz_{ab} \cdot \alpha_0 \cdot \beta_0) + V_0 \cdot (-1,181 \cdot 1 \cdot \omega_z)),
 \end{aligned}$$

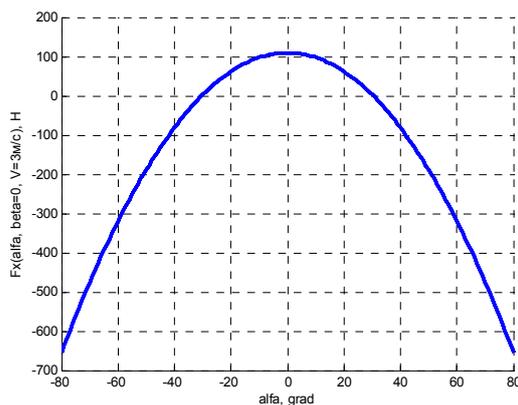
$$\begin{cases}
 \lambda_{11} = k_{11}\rho U; & \lambda_{22} = k_{22}\rho U; \\
 \lambda_{33} = k_{33}\rho U; & \lambda_{26} = k_{26}\rho UL; \\
 \lambda_{35} = k_{35}\rho UL; & \lambda_{66} = k_{66}\rho UL^2 \\
 \lambda_{44} = k_{44}\rho UL^2; & \lambda_{55} = k_{55}\rho UL^2;
 \end{cases} \quad (4)$$

где  $V_0 = (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)^{0,5}$ ;  $\alpha_0 = \arctan(-V_y/V_x)$ ;  $\beta_0 = \arcsin(V_z/V_0)$ ;  $\rho$  – плотность воды;  $U$  – объем АНПА ( $U = 0,2793$ );  $S = U^{2/3}$ ;  $k = \rho \cdot S \cdot V_0^{2/3}$ ;

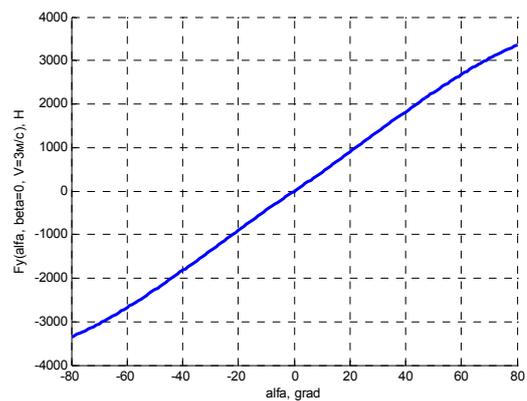
$$\begin{aligned} c x_0 &= 0,06805; c x_V = -3,57 \cdot 10^{-3}; c x_{a_2} = -0,204; c x_{b_2} = -0,069; & c y_0 &= \\ -4,011 \cdot 10^{-4}; c y_a &= 1,25; c y_{a_2} = 0,312, & c y_{a_3} &= -0,224, \\ c y_b &= -0,00701; c y_{b_2} = -0,420; & c z_b &= -1,174; c z_{b_2} = -0,449; c z_{b_3} = \\ 0,34; c z_{a b_2} &= -0,095; \\ m x_b &= 9,30 \cdot 10^{-3}; m x_{a b} = 0,131; m x_{a b_2} = -0,064; m y_b = 0,0680; m y_{b_2} = \\ 0,0389; m z_0 &= 5,47 \cdot 10^{-4}; m z_a = 0,0289; m z_{a_2} = 0,0855; m z_{a b} = 3,02 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

### Исследование модели

Средствами пакета численного моделирования и исследования гидродинамических характеристик NUMECA International были исследовано распределение давлений и скоростей для корпуса с оперением (рис. 3(б)) и графики зависимостей коэффициента лобового сопротивления (рис. 2(а)), подъемной силы (рис. 2(б)) и момента тангажа (рис. 3(а)) от угла атаки. На рисунках 2-4 приведены графики характерных зависимостей проекций гидродинамических сил и моментов от гидродинамических углов атаки и скольжения для скорости  $V = 3$  м/с.

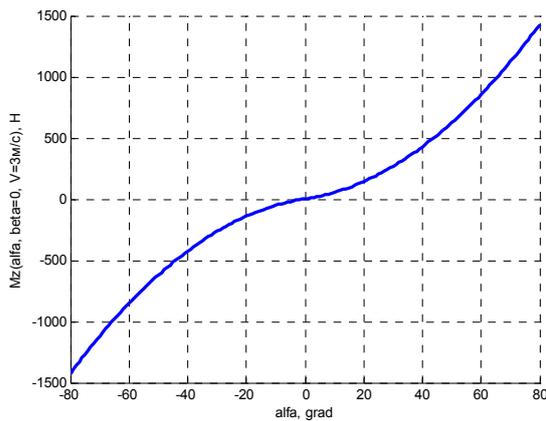


а)  $F_x(\alpha, V = 3 \text{ м/с}, \omega = 0)$

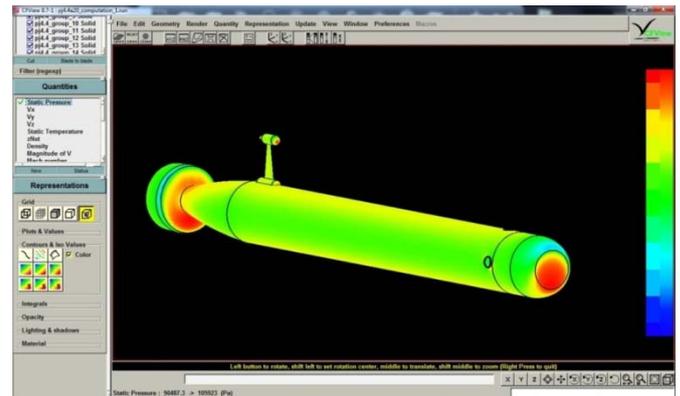


б)  $F_y(\alpha, V = 3 \text{ м/с}, \omega = 0)$

Рис. 2 – Зависимости гидродинамических нормальной  $F_x$  а), подъемной  $F_y$  б) сил от угла атаки  $\alpha$  при скорости  $V = 3$  м/с

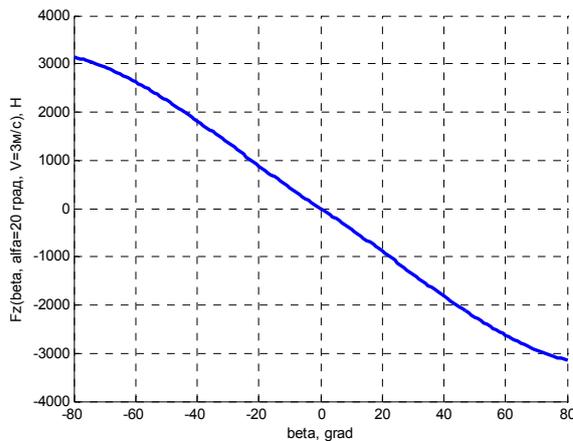


а)  $M_z(\alpha, V = 3\text{ м/с}, \omega = 0)$

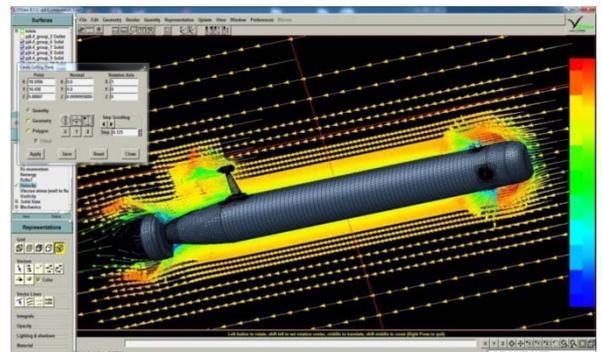


б) распределение гидродинамических давлений по поверхности аппарата

Рис. 3 – Зависимость момента тангажа  $M_z$  от угла атаки  $\alpha$  при скорости  $V = 3\text{ м/с}$



а)  $F_z(\beta, \alpha = 20^\circ, V = 3\text{ м/с}, \omega = 0)$



б) картина обтекания в продольной плоскости OXY связанной с аппаратом системы координат

Рис. 4 – Зависимость гидродинамической силы  $F_z$ , при угле атаки  $\alpha=20^\circ$  от угла скольжения  $\beta$  при скорости  $V=3\text{ м/с}$ .

## Анализ управляемости

Для анализа управляемости необходимо формализовать распределение управляющих сил и моментов конкретной компоновки двигательного-рулевого комплекса маршевым гребным винтом в насадке, и носовым подруливающим устройством

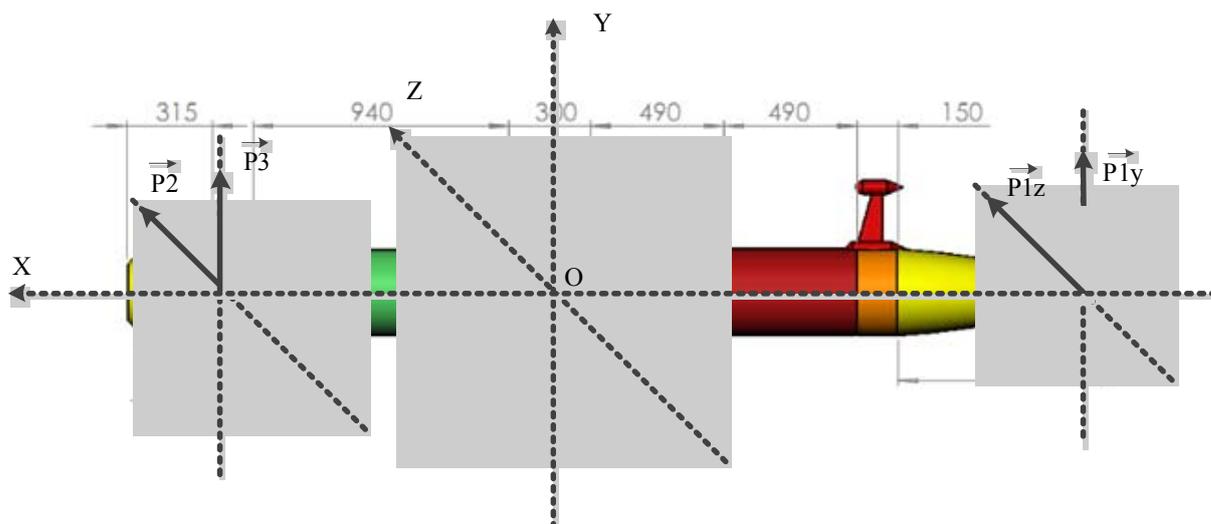


Рис. 5 – Распределение управляющих сил двигательного-рулевого комплекса АНПА

Проекции тяг создаваемые маршевым гребным винтом в насадке:  
 $P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}$ .

Тяги, создаваемые носовыми подруливающими устройствами:

- по горизонтали:  $P_2$ ;
- по вертикали:  $P_3$ .

Расстояние по осям до точки приложения сил указано в таблице №1:

Таблица №1

Расстояние по осям координат до точки приложения сил

по оси OX:	по оси OY:	по оси OZ:
$x_{md} = -1.9$	$y_{md} = 0$	$z_{md} = 0$
$x_{hz} = 1.28$	$y_{hr} = 0$	$z_{hr} = 0$
$x_{vr} = 1.18$	$y_{vr} = 0$	$z_{vr} = 0$

Для создания момента вокруг осей  $OY$  и  $OZ$  необходимо, чтобы силы, действующие на одной оси, имели противоположные знаки.

Уравнения сил и моментов, действующие на аппарат:

$$\begin{cases} F_{ux} = P_{1x} \\ F_{uy} = P_{1y} + P_3 \\ F_{uz} = P_{1z} + P_2 \\ N_{ux} = 0 \\ N_{uy} = -P_{1z}x_{md} + P_2x_{hz} \\ N_{uz} = -P_{1y}x_{md} + P_3x_{vr} \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) является прямым преобразованием сил и моментов, действующих на аппарат. Запишем обратное преобразование:

$$P_{1x} = F_{ux} \quad (6)$$

$$P_{1y} = \frac{x_{vr}}{x_{vr}+x_{md}} F_{uy} - \frac{1}{x_{md}+x_{vr}} N_{uz} \quad (7)$$

$$P_{1z} = \frac{x_{hz}}{x_{hz}+x_{md}} F_{uz} - \frac{1}{x_{hz}+x_{md}} N_{uy} \quad (8)$$

$$P_2 = \frac{x_{md}}{x_{md}+x_{hz}} F_{uz} + \frac{1}{x_{hz}+x_{md}} N_{uy} \quad (9)$$

$$P_3 = \frac{x_{md}}{x_{md}+x_{vr}} F_{uy} + \frac{1}{x_{md}+x_{vr}} N_{uz} \quad (10)$$

Для определения присоединенных масс корпуса АНПА, используем теоретические номограммы О.Н. Дудченко. Чтобы их применить, необходимо вычислить соотношения ширины к высоте ПА и длины к ширине.

При исследовании управляемости ПА было принято ее следующее определение [1]: объект называется полностью управляемым в некоторой области, если для любой пары точек (начальной и конечной) из этой области существует допустимое управление на конечном интервале времени, переводящее объект из начальной точки в сколь угодно малую окрестность конечной точки.

Проведем анализ управляемости объекта. Для того чтобы объект был управляемым в соответствии с теоремой Пятницкого [2] достаточно, чтобы

тяга движителей и гидродинамические силы превосходили требуемые усилия по осям координат. В частности, можно записать условия в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_{1x}^{max} > |F_x|, P_{1y} + P_3 > |F_y|, P_{1z} + P_2 > |F_z| \\ -P_{1z}x_{md} + P_2x_{hz} > |M_y|, -P_{1y}x_{md} + P_3x_{vr} > |M_z|, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $T^{max}$  - максимальная сила тяги, создаваемая двигателем,  $F_x, F_y, F_z, M_y, M_z$  - проекции вектора сил и моментов  $F_d + F_v$  на оси OX, OY, OZ.

По всем каналам управления действует либо тяга двигателя, либо тяга подруливающих устройств, поэтому они являются управляемыми при корректных заданиях.

### Выводы

Таким образом, построенная математическая модель представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, элементы которых определяются компоновкой и параметрами конкретного ПА, а также структурой и характером внешних возмущений. Кроме того, отличительной особенностью ПА является нестационарность элементов динамической модели ПА, зависящих от условий функционирования ПА и его конструктивных характеристик. Необходимость рассмотрения полной динамики ПА определяется жесткими требованиями к качеству функционирования ПА.

Специфика использования подводного аппарата для точной отработки траекторий на высоких скоростях требует обязательного учета, а также оценки или измерения, нестационарности его параметров (присоединенные моменты и массы и т.п.) [3,4,5,6], кроме того, при неопределенности среды функционирования необходима разработка структуры и алгоритмов подсистемы планирования перемещений [7,8,9,10].

### Благодарности

Авторы глубоко признательны их научному руководителю профессору Вячеславу Пшихопову.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ, НИР №114041540005 по государственному заданию ВУЗам и научным организациям в сфере научной деятельности, грантами Президента Российской Федерации № НШ-3437.2014.10, МД-1098.2103.10 и грантом РФФИ 13-08-00315а.

### Литература

1. Пятницкий Е.С. Управляемость классов лагранжевых систем с ограниченными управлениями // *АиТ*. 1996. №12. С. 29-37.
2. Пшихопов В.Х., Медведев М.Ю. Структурный синтез автопилота для подвижных объектов с оцениванием возмущений // *Информационно-измерительные и управляющие системы*. 2006. №1. С.103-109.
3. Пшихопов В.Х. *Позиционно-траекторное управление подвижными объектами*. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. 183 с.
4. Пшихопов В.Х., Сиротенко М.Ю., Гуренко Б.В. Структурная организация систем автоматического управления подводными аппаратами для априори неформализованных сред // *Информационно-измерительные и управляющие системы. Интеллектуальные и адаптивные роботы*. 2006. № 1-3. т.4. С. 73-79.
5. *Управление подвижными объектами. Библиографический указатель. В 3-х выпусках. Вып. 3. Морские объекты*. М.: 2011. 150 с.
6. Лукомский Ю.А., Чугунов В.С. *Системы управления морскими подвижными объектами: Учебник*. Л: Судостроение, 1988. 272 с.
7. Medvedev M. Y., Pshikhov V. Kh., Robust control of non linear dynamic systems // *Proceedings of 2010 IEEE Latin-American Conference on Communications (ANDERSON)*. 2010. С.1-7.



8. Pshikhopov V., Medvedev M., Kostjukov V., Fedorenko R., Gurenko B., Krukhmalev V. Airshipautopilot design// SAE Technical Paper №2011-01-2736. 2011. 5 с.

9. Федоренко Р.В. Алгоритмы автопилота посадки роботизированного дирижабля // Инженерный вестник Дона, 2011, №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2011/371.

10. Кульченко А.Е. Структурно-алгоритмическая организация автопилота работа-вертолета // Инженерный вестник Дона, 2011, №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2011/330.

### References

1. Pyatnitskiy E.S. AiT. 1996. №12. pp. 29-37.
2. Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu. Informatsionno-izmeritel'nye i upravlyayushchiesistemy. 2006. №1. pp.103-109.
3. Pshikhopov V.Kh. Pozitsionno-traektornoe upravlenie podvizhnykh ob"ektami [Position and trajectory control of mobile objects]. Taganrog: Izd-vo TTI YuFU, 2009. 183 p.
4. Pshikhopov V.Kh., Sirotenko M.Yu., Gurenko B.V. Informatsionno-izmeritel'nye i upravlyayushchiesistemy. Intellektual'nye i adaptivnyye roboty. 2006. № 1-3. t.4. pp. 73-79.
5. Upravlenie podvizhnykh ob"ektami. Bibliograficheskiy ukazatel'. V 3-kh vypuskakh. Vyp. 3. Morskije ob"ekty [Mobile object control. Issue 3. Marine objects]. M.: 2011. 150 p.
6. Lukomskiy Yu.A., Chugunov V.S. Sistemy upravleniya morskimi podvizhnykh ob"ektami: Uchebnik [Systems for marine mobile object control: textbook]. L: Sudostroenie, 1988. 272 p.



7. Medvedev M. Y., Pshikhopov V.Kh., Robust control of nonlinear dynamic systems. Proceedings of 2010 IEEE Latin-American Conference on Communications (ANDERSON). 2010. pp.1-7.
8. Pshikhopov V., Medvedev M., Kostjukov V., Fedorenko R., Gurenko B., Krukhmalev V. SAE Technical Paper №2011-01-2736. 2011. 5p.
9. Fedorenko R.V. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2011. №1. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n1y2011/371](http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2011/371).
10. Kul'chenko A.E. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2011. №1. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n1y2011/330](http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2011/330).