Исследование частоты колебаний волны в слое жидкости на пористом основании

Э.Н. Егерева, Р.А. Идиятов

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск

Аннотация: В работе рассматривается численное решение задачи о распространении поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании. Записаны выражения для декремента затухания и частоты колебаний волны. Показаны зависимости частоты колебаний волны от безразмерных величин, связывающих толщины слоя жидкости и слоя пористой среды. Рассмотрены различные частные случаи. Записано дисперсионное уравнение для бесконечной толщины слоя пористой среды.
Ключевые слова: пористая среда, частота колебаний волны, декремент затухания колебаний волны, ромбоэдрическая упаковка шариков пористой среды.

Рассматривается численное решение задачи о распространении поверхностных волн в слое тяжелой однородной несжимаемой жидкости, находящейся на недеформируемом пористом основании. Пористая среда снизу ограничена твердой непроницаемой стенкой и насыщена этой же жидкостью.

Исходные уравнения, граничные условия и границы применимости теории подробно рассмотрены в работе [1]. В статье [2] построена и исследована математическая модель распространения волн на поверхности слоя электропроводной жидкости с поверхностным электрическим зарядом, находящейся на слое пористой среды. В работе [3] оценены основные параметры контактирующих слоистых и их сочетаний с целью получения условий эффективного нелинейного взаимодействия в области распространения. В статье [4] рассмотрено управление амплитудами волн, вызванных донными смещениями. В работе [5] рассматривается невязкая жидкость, находящаяся между двумя твердыми неподвижными стенами. В статье исследовано дисперсионное соотношение и законы дисперсии для волн маловязкой жидкости. В статье [6] рассматривается распространение волн по поверхности жидкости, покрытой тонкой упругой пластиной и находящейся на недеформируемом пористом слое, ограниченном снизу сплошным твердым основанием. В работе [7] показано, что для толстого упругого слоя есть определенные толщины жидкого слоя и определенные частоты, на которых воздействие вязкости жидкости является самым слабым.

Принимаем следующие значения параметров: ρ = 1 г / см^3; η = 0,01 г/(см·с), пористую среду (слой 1) моделируем совокупностью шариков одинакового размера, уложенных определенным образом, пористость ε = 0,26 [8] выбрана в предположении наиболее плотной ромбоэдрической упаковки шариков, диаметр которых равен d = 1. Таким образом, рассматривается случай, когда пористая среда смоделирована из шариков одинакового диаметра. Коэффициент проницаемости K вычисляем, используя полуэмпирическую формулу Козени [9]: $\mathrm{K} = \frac{\varepsilon^2\alpha^2}{150(1-\varepsilon)^2}$.

Волновое число k выбираем с учетом того, чтобы выполнялись границы применимости теории [1].

Расчеты велись по следующим формулам. Корни дисперсионного уравнения выражаются через его коэффициенты с помощью формулы Кардано [5]: $\gamma = \alpha + \beta$, где $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q^2}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$; $\beta = \sqrt[3]{-\frac{q^2}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

При $D < 0$ выражение $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ имеет положительный знак, поэтому под знаком каждого из кубичных радикалов оказывается положительное число. Но кубичный корень из действительного числа имеет три значения: одно действительное и два комплексно-сопряженных. Обозначим α_1-действительное значение радикала α. Согласно формуле [9] $\alpha \cdot \beta = -\frac{p}{3}$, значение β_1 радикала β, ввиду действительности коэффициента p в приведенном квадратном уравнении, полученном из исходного дисперсионного уравнения, также будет действительным корнем кубичного радикала β. Поэтому $y_1 = \alpha_1 + \beta_1$ оказывается действительным корнями дисперсионного уравнения и соответствующего ему приведенного уравнения. Так как в этом случае колебательное движение отсутствует, то этот корень рассматривать не будем. Два корня дисперсионного уравнения находим по формулам:

$$y_2 = \alpha_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \beta_1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} + i\sqrt{3}\,\frac{\alpha_1+\beta_1}{2};$$

$$y_3 = \alpha_1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \beta_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - i\sqrt{3}\,\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}.$$

Так как α_1, β_1 - действительные числа, то y_2, y_3 - комплексно-сопряженные значения, причем мнимая часть y_2, y_3 отличается от нуля в силу того, что α_1 и β_1 являются различными значениями кубичных радикалов. Таким образом, два комплексно-сопряженных корня исходного дисперсионного уравнения: $\gamma_2 = y_2 - \frac{\alpha}{3}$ и $\gamma_3 = y_3 - \frac{\alpha}{3}$ дают колебательное движение. Отделяя вещественную и мнимую части корней $\gamma_{2,3}$, находим соответственно значения декремента затухания колебаний волны β и частоты ω. Формула для вычисления декремента затухания колебаний волны: $\beta = -\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - \frac{\alpha}{3}$, где α_1, β_1 - действительные значения кубичных радикалов α, β соответственно.

Формула для вычисления частоты колебаний волны имеет вид: $\omega = \left|\sqrt{3}\,\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}\right|$.

В таблице №1 приведены результаты расчётов зависимости частоты ω от волнового числа k. При значениях безразмерной величины $\chi = \frac{h_1}{h_2} = 0.08; 0.2; 0.4; 0.8; 2; 20$. Коэффициент вязкости в данном случае принимаем $\eta = 0.01$ г/(см $\cdot\, c$). Толщина слоя свободной жидкости $h_2 = 100$ см. Интервал изменения волнового числа k: $0 \le k \le 2 \cdot 10^{-3}$см$^{-1}$, что удовлетворяет границам применимости данной теории.

Зависимость частоты ω от волнового числа k. Таблица № 1.

$k \cdot 10^3, \text{см}^{-1}$	$\omega \cdot 10^1, c^{-1}$					
	$\chi = 0{,}08$	$\chi = 0{,}2$	$\chi = 0{,}4$	$\chi = 0{,}8$	$\chi = 2$	$\chi = 20$
0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,626063	0,0626065	0,626062	0,626060	0,626058	0,626057
0,4	1,251920	1,251920	1,251900	1,25188	1,25187	1,25187
0,6	1,87737	1,87737	1,87729	1,87724	1,87720	1,87717
0,8	2,50225	2,50219	2,50202	2,50189	2,50180	2,50174
1,0	3,12637	3,12618	3,12585	3,12560	3,12542	3,12531
1,2	3,74950	3,74912	3,74857	3,74815	3,74784	3,74764
1,4	4,37141	4,37080	4,36996	4,36930	4,36882	4,36850
1,6	4,99185	4,99100	4,98980	4,98882	4,98811	4,98765
1,8	5,61057	5,60949	5,60787	5,60651	5,60551	5,60485
2,0	6,22732	6,22606	6,22396	6,22213	6,22077	6,21987

Из таблицы №1 видно, что при фиксированном значении величины $\chi = \frac{h_2}{h_1}$ и увеличении волнового числа k частота ω увеличивается. При фиксированном значении k и увеличении значений безразмерной величины χ, что соответствует случаю $h_1 \to 0$ частота ω практически не изменяется, то есть значения частоты ω практически не зависят от h_1, поэтому результаты расчётов приведены не на графике, а в таблице. При $k \to 0$ значения частоты $\omega \to 0$ для любых значений безразмерной величины $\chi = \frac{h_2}{h_1}$.

При тех же значениях параметра k, в таблице №2 приведены зависимости частоты ω от волнового числа k для следующих значений безразмерной величины $\chi = 0.02; 0.25; 0.33; 0.05; 0.01$. При этом h_2 =10 см. При фиксированном k и увеличении значений χ (уменьшении значений h_1) частота ω практически не изменяется. Из таблицы также видно, что при фиксированном значении χ и увеличении числа k частота ω увеличивается.

Зависимость частоты ω от волнового числа k для безразмерной величины χ.

Таблица № 2.

$k \cdot 10^3, \text{см}^{-1}$	$\omega \cdot 10^1, c^{-1}$				
	$\chi = 0{,}1$	$\chi = 0{,}2$	$\chi = 0{,}033$	$\chi = 0{,}025$	$\chi = 0{,}02$
0	0	0	0	0	0
0,2	0,19799	0,19799	0,19799	0,19799	0,19799
0,4	0,395979	0,395979	0,395979	0,395978	0,395978
0,6	0,593966	0,593966	0,593966	0,593965	0,593964
0,8	0,791951	0,791951	0,791951	0,79195	0,791949
1,0	0,989933	0,989932	0,989931	0,989928	0,989925
1,2	1,18791	1,18791	1,18791	1,1879	1,1879
1,4	1,38588	1,38588	1,38588	1,385879	1,385879
1,6	1,58385	1,58385	1,58384	1,58384	1,58383
1,8	1,78181	1,78181	1,7818	1,78179	1,78178
2,0	1,97977	1,97976	1,97975	1,97974	1,97973

В таблице №3 показана зависимость частоты ω от безразмерной величины $\sigma = \frac{h_2}{\lambda}$ при следующих толщинах слоя пористой среды h_1 = 25, 50, 100, 175, 250, 500 см. Толщина слоя свободной жидкости, фиксированная h_2 = 250 см.

Зависимость частоты ω от безразмерной величины σ. Таблица № 3.

$\sigma = \dfrac{h_2}{\lambda}$	ω, c^{-1}					
	h_1= 25 см	h_1= 50 см	h_1=100 см	h_1=175см	h_1=250см	h_1=500см
0,01	0,12432	0,124319	0,12432	0,12432	0,124321	0,124322
0,0595	0,723875	0,723701	0,72379	0,723875	0,723954	0,724165
0,109	1,26442	1,26366	1,26405	1,26442	1,26473	1,26534
0,1585	1,72394	1,72257	1,72331	1,72394	1,72441	1,72505
0,208	2,1052	2,10357	2,10449	2,1052	2,10562	2,10602
0,257	2,42301	2,42153	2,42242	2,42301	2,4233	2,4235
0,307	2,69379	2,69263	2,69337	2,69379	2,69395	2,69403
0,356	2,93086	2,93003	2,9306	2,93086	2,93094	2,93097
0,406	3,14377	3,14323	3,14362	3,14377	3,14381	3,14382
0,4555	3,33902	3,33867	3,33894	3,33902	3,33903	3,33904
0,505	3,52089	3,52068	3,52085	3,52089	3,5209	3,5209

Из таблицы №3 видно, что частота практически не зависит от толщины пористого слоя h_1 (изменения в строке таблицы №3 незначительные). При увеличении значения безразмерной величины σ → +∞ или $\lambda \to 0 \left(k = \frac{2\pi}{\lambda} \to +\infty\right)$ значения частоты колебаний волны увеличиваются.

Рассмотрим вопрос о предельных значениях частоты ω и декремента затухания β от коэффициента проницаемости K, при $K \to 0$ и при $K \to \infty$, ε →1. Дисперсионное уравнение для поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании запишем в виде:

$$\frac{\rho}{g}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{1}{\varepsilon}\right)\gamma^3 + \frac{\eta}{gK}\gamma^2 + \rho k\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\gamma - \frac{\eta k}{K}\frac{\alpha_4}{\alpha_2} = 0. \quad (1)$$

При $K \to 0$ из (1) следует $\gamma^2 = gk \cdot \frac{\alpha_4}{\alpha_2}$. Отсюда, в частности, получаем, что при $h_2 \to +\infty$: $\gamma^2 = -gk$ т.е. $\omega^2 = gk, \beta = 0$, что совпадает с результатами исследований, полученными в работе [10].

Исследование аналитической зависимости β и ω от K в общем виде затруднительно в связи с математическими сложностями, поэтому ограничимся численным изучением частных случаев. При $K \to +\infty$, $\varepsilon \to 1$ из уравнения (1) следует $\gamma^2 = -gk$ то есть $\omega^2 = gk, \beta = 0$.

В таблице №4 при $h_1 = 100$ см, $\chi = 1; 5; 10; 15; 20$; $k = 1 \cdot 10^{-3}$ см$^{-1}$; $\varepsilon = 0{,}26$ приведена зависимость частоты ω от проницаемости K. Результаты занесены в таблицу, а не показаны на графиках, в связи с тем, что ω практически не зависит от K.

Зависимость частоты ω от проницаемости K. Таблица № 4.

K, см^2	$\omega \cdot 10^1, c^{-1}$				
	$\chi = 1$	$\chi = 5$	$\chi = 10$	$\chi = 15$	$\chi = 20$
$1 \cdot 10^{-7}$	3,12529	6,7296	8,63923	9,41831	9,71981
$1{,}0009 \cdot 10^{-4}$	3,12535	6,7297	8,6393	9,41834	9,71982
$2{,}0008 \cdot 10^{-4}$	3,12551	6,72999	8,6395	9,41844	9,71986
$3{,}0007 \cdot 10^{-4}$	3,12578	6,73049	8,63984	9,4186	9,71993
$4{,}0006 \cdot 10^{-4}$	3,12617	6,73117	8,64032	9,41882	9,72002
$5{,}0005 \cdot 10^{-4}$	3,12666	6,73205	8,64091	9,4191	9,72013
$6{,}0004 \cdot 10^{-4}$	3,12725	6,7331	8,64162	9,41943	9,72026
$7{,}0003 \cdot 10^{-4}$	3,12796	6,73433	8,64244	9,41981	9,72041
$8{,}0002 \cdot 10^{-4}$	3,12877	6,73572	8,64336	9,42023	9,72058
$9{,}0001 \cdot 10^{-4}$	3,12969	6,73727	8,64437	9,42069	9,72077
$1 \cdot 10^{-3}$	3,13071	6,73896	8,64545	9,42118	9,72096

Выясним в исходном дисперсионном уравнении результат предельного перехода $k \to 0$ или, что тоже, $\lambda \to +\infty$. При этом $\alpha_1 \to 0$; $\alpha_2 \to 4$; $\alpha_3 \to 0$; $\alpha_4 \to 0$. Поэтому дисперсионное уравнение принимает вид: $\left(\frac{\eta}{K} - \frac{\rho\gamma}{\varepsilon}\right)\gamma^2 = 0$.

Отсюда видно, что $\gamma_1 = \frac{\eta\varepsilon}{\rho k}$; $\gamma_{2,3} = 0$ при $k \to 0$. При $\eta = 0{,}01 г/(см \cdot с)$; $\varepsilon = 0{,}26$; $\rho = 1\, г/см^3$; $K = 2{,}139 \cdot 10^{-4}\, см^2$ величина $\gamma_1 = 12{,}15\, с^{-1}$. Корень γ_1не представляет интереса, поскольку соответствующее ему движение быстро затухает. Из того, что $\gamma_{2,3} = 0$ следует $\beta = 0$ и $\omega = 0$ при $k \to 0$. Тогда при $k = \frac{2\pi}{\gamma} \to 0$ (или $\lambda \to +\infty$) для всех рассмотренных значений h_1 и h_2: $\beta \to 0$, $\omega \to 0$.

Рассмотрим частный случай дисперсионного уравнения, когда $h_1 \to +\infty$. Данный случай соответствует бесконечной толщине слоя пористой среды. Для этого рассмотрим предельный переход в переменных α_1 ($i = 1,2,3,4$) при $h_1 \to +\infty$. В силу того, что мы не можем приравнять две бесконечные величины, поделим обе части дисперсионного уравнения на $exp2kh_1$ и перейдём к пределу при $h_1 \to +\infty$, получим:

$$\lim_{h_1 \to +\infty} \frac{\alpha_1}{exp2kh_1} = \lim_{h_1 \to +\infty} \frac{\alpha_4}{exp2kh_1} = 1 - exp2kh_2; \qquad (2)$$

$$\lim_{h_1 \to +\infty} \frac{\alpha_2}{exp2kh_1} = \lim_{h_1 \to +\infty} \frac{\alpha_3}{exp2kh_1} = 1 + exp2kh_2.$$

С учетом (2) дисперсионное уравнение при $h_1 \to +\infty$ имеет вид:
$\frac{\rho}{g}\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\varepsilon}\right)\gamma^3 + \frac{\eta\alpha_2}{gK}\gamma^2 + \rho k\left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon} - \alpha_2\right)\gamma - \frac{\eta k}{K}\alpha_1 = 0$,
где $\alpha_1 = 1 - exp2kh_2$; $\alpha_2 = 1 + exp2kh_2$.

Литература

1. Егерева Э.Н. Задача о распространении поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании в нелинейном приближении // Труды Средневолжского математического общества, 2004, №1, с. 259-266.

2. Тактаров Н.Г., Миронова С.М. Моделирование поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, №4, с. 1163.

3. Михралиева А.И., Заграй Н.П., Чернов Н.Н., Аль - Саман А.Х. Определение упругих свойств биологических слоистых сред на основе нелинейного взаимодействия акустических волн // Инженерный вестник Дона, 2016, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2016/3735.

4. Кандалфт Хекмат. Управление амплитудой волн, вызванных донными смещениями // Инженерный вестник Дона, 2011, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2011/333.

5. A. I. Grigoriev. Internal transverse fluctuation waves in a viscous liquid at a hard boundary // Zhurnal Tekhnicheskoĭ Fiziki, 2011, №6, pp. 30–35.

6. Лемясева Н.А. Исследование поверхностных волн на жидкости, покрытой упругой пластиной и находящейся на пористом основании // Международный журнал экспериментального образования, 2015, № 11, с. 648-648.

7. Bagno A.M. Wave Propagation in an Elastic Layer Interacting with a Viscous Liquid Layer // International Applied Mechanics, 2016, № 2, pp. 36–45.

8. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. 2 изд. М.: Наука, 1977. 664 с.

9. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1994. 350 с.

10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 2006. 736 с.

References

1. Egereva E.N. Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2004. № 1. Pp. 259-266.

2. Taktarov N.G., Mironova S.M. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. 2011. № 4. p. 1163.

3. Mihralieva A.I., Zagray N.P., Chernov N.N., Al - Saman A.H. Inženernyj vestnik Dona, 2016, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2016/3735.

4. Kandalft Hekmat. Inženernyj vestnik Dona, 2011 №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2011/333.

5. A. I. Grigoriev. Zhurnal Tekhnicheskoĭ Fiziki. 2011. №6. Pp. 30–35.

6. Lemyaseva N.A. Mezhdunarodnyj zhurnal experimentalnogo obrazovaniya, 2015, № 11. Pp. 648-648.

7. Bagno A.M. International Applied Mechanics, 2016, № 2, pp. 36–45.

8. Polubarinova-Kochina P.YA. Teoriya dvizheniya gruntovyh vod [Theory of the movement of ground waters]. 2-e izd., M.: Nauka, 1977. 664 p.

9. Kollinz R. Techenie zhidkostey cherez poristye materialy [Current of liquids through porous meterials]. M.: Mir. 1994. 350 p.

10. Landau L.D. Lifshic E. M. Gidrodinamika [Hydrodynamics]. M.: Nauka. 2006. 736 p.