

## Устойчивость предварительно сжимаемой арматуры в железобетонных балках

*Л.А. Барагунова*

*Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик*

**Аннотация:** Исследование и совершенствование железобетонных балок с применением предварительно сжатой высокопрочной арматуры в современном строительстве с целью повышения технико-экономических показателей.

**Ключевые слова:** Устойчивость, критическая сила, дифференциальные уравнения, математическая модель, многопролётный стержень, железобетонные балки, шарнирные опоры, шаг опирания, высокопрочная арматура, растяжение-сжатие, предварительное сжатие.

Хорошо известно, что предварительное растяжение стальной арматуры, укладываемой в растянутой зоне железобетонных конструкций, даёт значительную экономию. Исследования, проводимые в последние десятилетия в Российской Федерации [1-7] и за рубежом [8, 9], показывают, что арматура в сжатой зоне, подвергаемая предварительному сжатию, также способна дать заметный экономический эффект.

Некоторой помехой в реализации такой цели является неустойчивость длинной гибкой арматуры на предварительном этапе сжатия в опалубке. Для повышения критической силы её привязывают проволокой к поперечной арматуре, располагаемой с шагом ориентировочно 30...50 см (рис. 1).



Рис. 1. Схема расположения арматуры

Этот вопрос не исследован. Нет, например, обоснования необходимости столь частых креплений к поперечной арматуре, особенно, если учесть, что они работают лишь в краткий период твердения бетона (28 суток). Может оказаться, что здесь имеются лишние траты дорогостоящего металла, времени и труда. Такие причины побуждают рассмотреть вопрос с

целью создания математической модели такой задачи с позиций строительной механики и её решении.

Ясно, что сжатая арматура представляет многопролётный стержень, опирающийся на поперечную арматуру в местах связи. Такие опоры можно принять абсолютно твёрдыми в вертикальном направлении, шарнирно подвижными в горизонтальном направлении. Перемещению в вертикальном направлении препятствуют выступы на поверхности арматуры (рифления). В то же время крепление к поперечной арматуре не является жёстким по отношению к углам поворота. Поэтому шарнирные опоры в расчётной схеме (рис. 2.) снабжаются спиральными пружинами с коэффициентом жёсткости  $c$ .

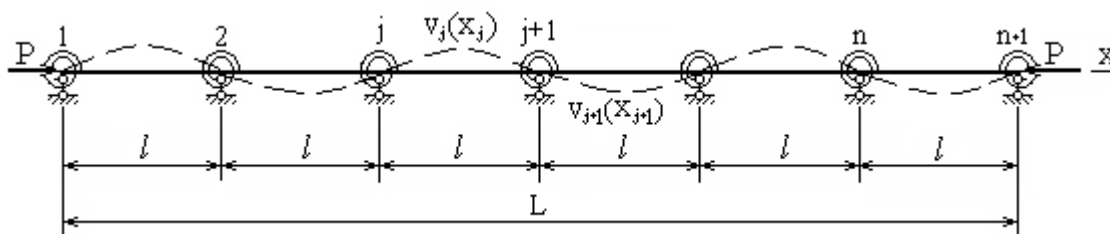


Рис. 2. Расчётная схема

Рассматривается  $n$ -пролётный стержень (сжатая арматура) с пролётами  $l$ , из арматуры с модулем  $E$  и моментом инерции сечения  $J$ . В продольном направлении действует осевая сжимающая сила  $P$ . Критическая сила должна быть больше силы  $P$ , т. е. удовлетворять соотношению

$$P_{кр} \geq n_y P, \tag{1}$$

где  $n_y$  – коэффициент запаса по устойчивости, имеющий значения в диапазоне 1,6...5 [10] в зависимости от конкретной ситуации. В данном случае он может быть принят минимальным ( $n_y = 1$ ), так как в момент сжатия арматура доступна, и потерю устойчивости можно устранить без ущерба.

Далее задача состоит в том, чтобы найти максимальное значение шага опирания сжимаемой арматуры  $l$ , при котором выполняется условие устойчивости

$$P < P_{кр}/n_y. \tag{2}$$

Точное решение такой задачи аналитическими методами удаётся находить лишь для некоторых простых частных случаев: количество

пролётов  $n$  небольшое, длины пролётов  $l$  одинаковые, опоры идеально шарнирные и т. д.

Имеется возможность решить проблему графоаналитическими способами с достижением высокой степени точности при использовании современных вычислительных комплексов.

При эйлеровой постановке задачи устойчивости, приведённой выше, изогнутая ось сжатого стержня описывается для каждого  $j$ -го пролёта обыкновенным дифференциальным уравнением четвёртого порядка

$$EJv_j^{IV} + Pv_j'' = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где  $E$  – модуль упругости материала,  $J$  – осевой момент инерции поперечного сечения,  $v_j(x_j)$  – функция прогибов,  $x_j$  – локальные координаты  $j$ -го пролёта с началом, совпадающим с левым концом пролёта; верхние индексы соответствуют порядку дифференцирования. Разделим (3) на  $EJ$  и получим

$$v_j^{IV} + k^2 v_j'' = 0, \quad x \in (0, l). \quad (4)$$

Здесь введены обозначения

$$b = EJ, \quad k^2 = P/b.$$

Уравнение (4) является основным уравнением математической модели задачи об устойчивости стержня. К нему должны присоединяться дополнительные условия в виде граничных условий и условий сопряжений смежных пролётов. Шарнирно-упругое опирание левого конца стержня приводит к равенствам

$$v_1(0) = 0, \quad bv_1''(0) - cv_1'(0) = 0. \quad (5)$$

Условия сопряжения участков состоят в том, что слева и справа от опоры перемещения равны нулю, углы поворота сечений равны между собой вследствие непрерывности деформаций, а в узле опирания изгибающие моменты слева и справа от сечения уравниваются моментом от закручивания спиральной пружины

$$\begin{aligned} v_j(l) = 0, \quad v_{j+1}(0) = 0, \quad v_j'(l) = v_{j+1}'(0), \\ bv_j''(l) + cv_j'(l) - bv_{j+1}''(0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (6)$$

Шарнирное опирание левого и правого концов дают

$$v_1(0) = 0, \quad bv_1''(0) - cv_1'(0) = 0$$

$$v_n(l) = 0, \quad bv_n''(l) + cv_n'(l) = 0. \quad (7)$$

Далее будем искать спектр собственных значений  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  задачи (4)-(7) при которых возможны её нетривиальные решения

$$v_j(x_j) \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Известно, что однородное уравнение (4) имеет общее решение

$$v_j(x_j) = A_j \sin kx_j + B_j \cos kx_j + C_j x_j + D_j, \quad (8)$$

где  $A_j, B_j, C_j, D_j$  – произвольные постоянные интегрирования. Как можно заметить, их общее количество составляет  $4n$ . Их значения должны удовлетворять граничным условиям на концах стержня (5), (7) и условиям сопряжения соседствующих пролётов (6).

Подставляя (8) в (5) – (7) получим

$$v_j'(x_j) = A_j k \cos kx_j - B_j k \sin kx_j + C_j, \quad v_j''(x_j) = -A_j k^2 \sin kx_j - B_j k^2 \cos kx_j.$$

Левый край:  $B_1 + D_1 = 0$ ,

$$b(-B_1 k^2) - c(A_1 k + C_1) = 0, \quad cA_1 k + bB_1 k^2 + cC_1 = 0.$$

Правый край:  $A_n \sin kl + B_n \cos kl + C_n l + D_n = 0$ .

$$b(-A_n k^2 \sin kl - B_n k^2 \cos kl) + c(A_n k \cos kl - B_n k \sin kl + C_n) = 0$$

$$(-bk^2 \sin kl + ck \cos kl)A_n + (-bk^2 \cos kl - ck \sin kl)B_n + cC_n = 0$$

Сопряжения пролётов:

$$A_j \sin kl + B_j \cos kl + C_j l + D_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$B_{j+1} + D_{j+1} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$A_j k \cos kl - B_j k \sin kl + C_j - A_{j+1} k - C_{j+1} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$b(-A_j k^2 \sin kl - B_j k^2 \cos kl) + c(A_j k \cos kl - B_j k \sin kl + C_j) - b(-B_{j+1} k^2) = 0.$$

$$A_j (-bk^2 \sin kl + ck \cos kl) + B_j (-bk^2 \cos kl - ck \sin kl) + C_j c + B_{j+1} bk^2 = 0.$$

В итоге имеем матрично-векторное уравнение

$$FA = 0,$$

где вектор  $A$  образован произвольными постоянными интегрирования, а матрица  $F$  получается из процедуры подстановки и является блочной по своей структуре

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_0 & & \dots & & \\ & F_1 & & \dots & \circ \\ & & F_2 & & \dots \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ & & & \circ & \dots \\ & & & & F_{n-1} \\ & & & & & F_n \end{pmatrix}.$$

Матрица  $F$  является квадратной порядка  $4n$ , её элементы зависят от искомого значения  $P$ , т.е.  $f_{ij} = f_{ij}(P)$ . Отдельные блоки имеют вид

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ ck & bk^2 & c & 0 \end{pmatrix}, \quad F_n = \begin{pmatrix} s & r & l & 1 \\ p & q & c & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_j = \begin{pmatrix} s & r & l & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ kr & -ks & 1 & 0 & -k & 0 & -1 & 0 \\ p & q & c & 0 & 0 & bk^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Здесь введены обозначения

$$s = \sin kl, \quad r = \cos kl, \quad p = -bk^2 s + ckr, \quad q = -bk^2 r - cks.$$

Ненулевые значения элементов вектора  $A$  (хотя бы одного) возможны лишь в том случае, если определитель матрицы  $F$  равен нулю. Это требование приводит к трансцендентному уравнению

$$\det F(P) = 0. \quad (9)$$

Его решение аналитическими методами затруднительно и определяется в замкнутом виде лишь в некоторых простых случаях. Приближённое решение возможно численными и графическими способами. Использование численных методов приводит к громоздким компьютерным программам, необходимости отделения корней перед началом счёта, т. е. к необходимости указания области расположения начальных приближённых значений  $P$  и

подобным неудобствам. Поэтому воспользуемся реализуемым на компьютере графоаналитическим методом, предложенным в работе [2] для определения критических сил сжатого стержня кусочно-постоянного сечения с промежуточными опорами в пролёте. Суть его состоит в том, что имеется возможность быстрой визуализации графика левой части (9) с помощью современных компьютерных вычислительных комплексов высокого уровня (MatLab, MathCad и т.д.). С этой целью в координатной системе  $P - \det F$  строится соответствующая кривая. Точки пересечения ею оси  $P$  и определяют значения критических сил. При этом возможность увеличения избранных фрагментов рисунка легко позволяет достигать высокой степени точности, что принципиально отличает компьютерный графический способ от ранее применявшихся ручных способов, обладавших невысокой точностью.

Для верификации теоретических результатов, алгоритма счёта и компьютерной программы, составленной на их основе, выполнен тестовый пример.

*Пример 1.* Воспользуемся хорошо известной формулой Эйлера для определения критической силы стержня с шарнирно опёртыми концами

$$P_{кр} = \frac{i^2 \pi^2 EJ}{l^2}, \quad i=1, 2, 3, \dots$$

Примем тестовые числовые значения  $l = \pi$ ,  $b = EJ = 1$ ,  $n = 3$ ,  $c = 0$ .

Тогда элементы спектра критических сил имеют значения

$$P_{кр} = j^2, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Первые три силы образуют множество

$$P_{кр} = \{1, 4, 9\}.$$

На экран монитора выдан график рис. 3. Жирно отмечены точки пересечения кривой с горизонтальной осью  $P$ , отвечающие равенству нулю определителя

$$\det F = 0.$$

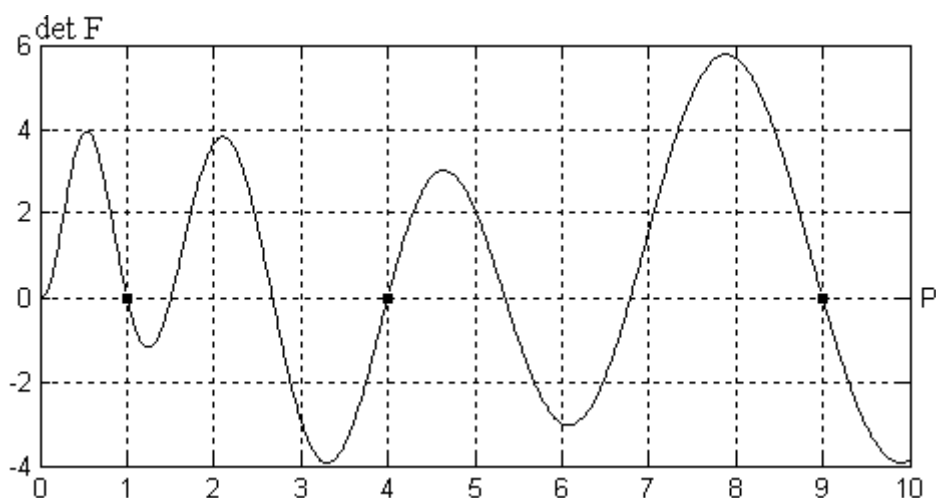


Рис 3. График, показывающий совпадение критических сил с контрольными значениями

Критические силы почти неотличимо совпадают с контрольными числами. Интересно при этом заметить, что точек пересечения значительно больше, чем предполагается формулой (9). Это означает, что спектры собственных значений и форм у многопролётных стержней намного плотнее, чем у однопролётных. В частности, рис. 3 даёт ещё дополнительно четыре точки для критических сил. При этом соответствующие вычислительные эксперименты обнаруживают, что первая критическая сила остаётся неподвижной на числовой оси, т. е. независимой от количества пролётов  $n$

$$P_{кр1} = const.$$

В дальнейших вычислениях именно она и будет приниматься во внимание.

*Пример 2.* Заданы параметры стержня:

$$E = 210 \text{ ГПа}, \quad L = 12 \text{ м}, \quad d = 2 \text{ см}, \quad A = 3,142 \text{ см}^2, \\ J = 0,7845 \text{ см}^4, \quad \sigma = 240 \text{ МПа}, \quad n_y = 1, \quad c = 12 \text{ кНм/рад}.$$

Здесь  $L$ ,  $d$ ,  $A$  – длина, диаметр площадь сечения арматуры,  $\sigma$  – нормальное сжимающее напряжение в сечении арматуры,  $c$  – коэффициент жёсткости спиральной пружины,  $n_y$  – коэффициент запаса по устойчивости.

Требуется, постепенно повышая количество пролётов стержня, определить минимальное значение  $n$ , при котором удовлетворяется условие устойчивости (2). При этом расчётной принимается первая критическая сила.

График, полученный в результате счёта, представлен на рис. 4. Критическая сила, прочитанная с экрана при  $l = 70$  см, как первая (минимальная) равна

$$P_{кр} = 76,8 \text{ кН.}$$

Сила предварительного сжатия по входным данным

$$P = \sigma A = 75,4 \text{ кН.}$$

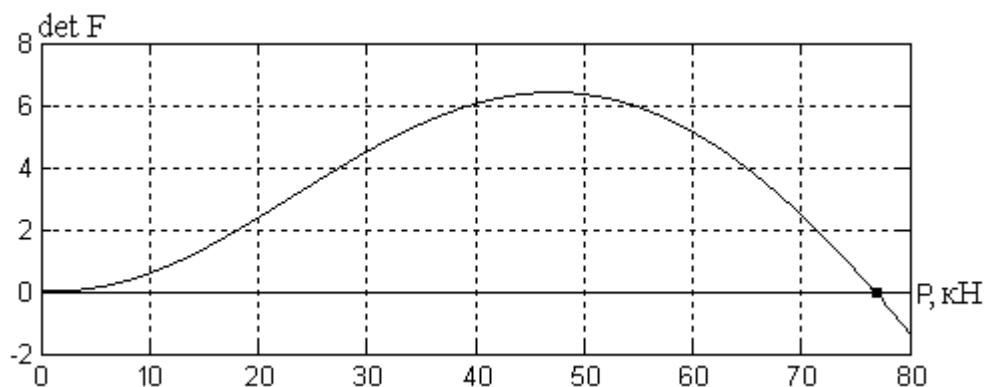


Рис. 4. – Значение первой критической силы

Условие устойчивости (2) с фактическим коэффициентом запаса  $n_y = 1,02$  выполняется. Это означает, что поперечную и продольную арматуры необходимо перевязывать с шагом 70 см, что примерно вдвое больше обычно принимаемых расстояний.

### Литература

1. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
2. Культербаев Х.П., Чеченов Т.Ю. Об устойчивости многопролётного стержня с переменной жёсткостью. РГСУ. Материалы Международной научно-практической конференции «Строительство – 2006». Ростов-на-Дону. 2005. С.126-128.
3. Барагунова Л. А. Определение критической силы сжатого стержня с промежуточными опорами. Наука, техника и технология XXI века (НТТ-2005). Материалы второй Всероссийской научно-технической конференции (Нальчик, 29-30 сентября 2005 г.). Часть II. С.16-20.
4. Маилян Д.Р., Маилян Р.Л., Кубасов А.Ю. и др. Рекомендации по расчету и проектированию железобетонных конструкций с комбинированным преднапряжением // Ростов-на-Дону:



СевкавНИПИАгропром, РГСУ, 1999. – С. 132.

5. Маилян Д.Р., Мединский В.Л., Азизов А.Г. Повышение эффективности использования высокопрочной стержневой арматуры в сжатых железобетонных элементах // Новые виды арматуры.-М.: НИИЖБ,1982. - С. 279.

6. Маилян Р.Л., Лихов З.Р. Повышение эффективности стропильных железобетонных балок // Сборник докладов Международной конференции "Бетон и железобетон в третьем тысячелетии". - г. Ростов-на-Дону: РГСУ. - 2002г. - С. 180-190.

7.Лихов З.Р., Бердов М.М., Сабанчиев А.А., Шерибов Ш.М. Технико-экономические показатели предлагаемых решений стропильных железобетонных балок с комбинированным преднапряжением. // Инженерный вестник Дона, 2016, №2, URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2016/3649

8.Лихов З.Р., Бердов М.М., Сабанчиев А.А., Пшуков В.Х. Аналитическое описание диаграмм деформирования материалов для расчёта железобетонных элементов с комбинированным предварительным напряжением. // Инженерный вестник Дона, 2016, №2, URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2016/3650.

9. Sargin M. Stress-strain relationships for concrete and the analysis of structural concrete sections. SM study, №4, Solid Mechanical Division, University of Waterloo. Ontario, Canada. – 1970. p. 167.

10. Wafa F., Hasnat Abul, Akhtaruzzaman Ali A. Prestressed Concrete Beams with Opening under and Bending //Journal of Structural Engineering – ASCE. 1989. - N. 11. Vol. 115. PP. 2727-2739.

### References

1. Alfutov N.A. Osnovy rascheta na ustoychivost' uprugikh sistem [Fundamentals of calculation on the stability of elastic systems]. M. Mashinostroenie, 1978. 312 p.

---



2. Kul'terbaev Kh.P., Chechenov T.Yu. RGSU. Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Stroitel'stvo 2006». Rostov-na-Donu. 2005. pp.126-128.
3. Baragunova L. A. Nauka, tekhnika i tekhnologiya XXI veka (NTT-2005). Materialy vtoroy Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii (Nal'chik, 29-30 sentyabrya 2005). Chast' II. pp.16-20.
4. Mailjan D.R., Mailjan R.L., Kubasov A.Ju. i dr. Rekomendacii po raschetu i proektirovaniyu zhelezobetonnyh konstrukcij s kombinirovannym prednaprjazheniem Rostov-na-Donu.: SevkavNIPIagroprom, RGSU, 1999. 132 p.
5. Mailjan D.R., Medinskij V.L., Azizov A.G. Povyshenie jeffektivnosti ispol'zovaniya vysokoprochnoj sterzhnevoj armatury v szhatyh zhelezobetonnyh jelementah Novye vidy armatury.M.: NIIZhB,1982. 279 p.
6. Mailjan R.L., Lihov Z.R. Sbornik dokladov Mezhdunarodnoj konferencii "Beton i zhelezobeton v tret'em tysjacheletii". g. Rostov-na-Donu: RGSU. 2002. pp. 180-190.
7. Lihov Z.R., Berdov M.M., Sabanchiev A.A., Sheribov Sh.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2016, №2 URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n2y2016/3649](http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2016/3649).
8. Lihov Z.R., Berdov M.M., Sabanchiev A.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2016, №2 URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n2y2016/3650](http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2016/3650).
9. Sargin M. Stress-strain relationships for concrete and the analysis of structural concrete sections. SM study, №4, Solid Mechanical Division, University of Waterloo. Ontario, Canada. 1970. 167 p.
10. Wafa F., Hasnat Abul, Akhtaruzzaman Ali A. Prestressed Concrete Beams with Opening under and Bending Journal of Structural Engineering ASCE. 1989. N. 11. Vol. 115. pp. 2727-2739.