Инженерный вестник Дона, №1 (2016)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2016/3528

Анализ абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем посредством вычисления иннорных определителей

В.Н. Смоляков

Северо-Кавказский филиал Московского технического университета связи и информатики, Ростов-на-Дону

Аннотация: Предлагаются рекуррентные математические выражения, позволяющие посредством разработанной программы определить коэффициенты специального полинома, получаемого из передаточной функции нелинейной импульсной системы любого порядка. Приводится методика проверки строгой положительности полученного полинома (являющегося аналогом характеристического полинома системы) по знакам определителей иннорной матрицы и тем самым определить факт абсолютной устойчивости системы.
Ключевые слова: нелинейные импульсные системы, вычисление коэффициентов полинома, построение иннорных матриц, определение абсолютной устойчивости по знакам определителей инноров.

Критерий абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем (НИС) с неустойчивой или нейтральной линейной импульсной частью (ЛИЧ) имеет вид [1-3]:

$$Re\frac{1+kW(j\overline{\omega})}{1+rW(j\overline{\omega})}>0, \quad \forall\overline{\omega}\in[-\pi;+\pi], \tag{1}$$

$$W(j\varpi)=\frac{1}{T_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}W(j\omega+j\omega_0), \tag{2}$$

где T_0 - период квантования; ω_0 – частота квантования; ω – круговая частота; $W(j\overline{\omega})$ - частотная характеристика ЛИЧ системы

Графическую проверку выполнения критерия (1) для систем с ЛИЧ высокого порядка практически выполнить сложно ввиду трансцендентности выражения (2). Используя w-преобразование, можно перейти от трансцендентной функции (2) к алгебраической и тем самым исключить указанные трудности. Критерий (1) в этом случае примет вид:

$$Re\frac{1+kW_{ЛИЧ}(jw)}{1+rW_{ЛИЧ}(jw)}>0, \quad \forall w, \tag{3}$$

Где $w = jv$, $v = tg(\omega T_0/2)$ – относительная псевдочастота; характеристика $\Phi(\sigma)$ нелинейного элемента (НЭ) удовлетворяет условию:

$$r \le \frac{\Phi(\sigma)}{\sigma} \le k, \quad r_1 \le \frac{d\Phi(\sigma)}{\sigma} \le k_1, \quad \Phi(0) = 0 \tag{4}$$

Передаточную функцию ЛИЧ НИС представим в виде:

$$W_{ЛИЧ}(jw) = k_0 \frac{\sum_{i=0}^{n} c_i w^i}{\sum_{i=0}^{n} d_i w^i} = k_0 \frac{\alpha_1 + j\beta_1}{\alpha_2 + j\beta_2}, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1(v) &= \sum_{i=0}^{S} (-1)^i c_{2i} v^{2i}, \quad \alpha_2(v) = \sum_{i=0}^{S} (-1)^i d_{2i} v^{2i}, \\ \beta_1(v) &= \sum_{i=0}^{S_1} (-1)^i c_{2i+1} v^{2i+1}, \quad \beta_2(v) = \sum_{i=0}^{S_1} (-1)^i d_{2i+1} v^{2i+1}, \end{aligned} \tag{6}$$

при n четном $S = n/2$, $S_1 = (n-2)/2$; при n нечетном $S = S_1 = (n-1)/2$; n – порядок $W_{ЛИЧ}(w)$, c_i и d_i – коэффициенты, выражаемые через параметры ЛИЧ НИС.

Подставляя (5) в (3), после преобразований получим неравенство, равносильное критерию (3):

$$k_o(k+r)[\alpha_1(v)\alpha_2(v) + \beta_1(v)\beta_2(v)] + k^2_o rk[\alpha^2{}_1(v) + \beta^2{}_1(v)] + \alpha^2{}_2(v) + \beta^2{}_2(v) =$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{k=0}^{n} a_k v^{2k} = P(v^2) > 0, \ \forall v \tag{7}$$

где a_k –действительные числа

Таким образом, НИС будет абсолютно устойчива, если уравнение

$$P(v^2) = \sum_{k=0}^{n} a_k v^{2k} = 0$$

не будет иметь положительных вещественных корней для всех v.

Подставляя (6) в (7), после преобразований получим:

$$P(v^2) = \sum_{k=0}^{n} a_k (v^2) = \sum_{i=0}^{S} \sum_{j=0}^{S} (-1)^{i+j} \left[k_0(r+k) c_{2i} d_{2j} + k_0{}^2 rk\, c_{2i} c_{2j} + d_{2i} d_{2j} \right] v^{2(i+j)} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{S_1} \sum_{j=0}^{S_1} (-1)^{i+j} \left[k_0(r+k) c_{2i+1} d_{2j+1} + k_0{}^2 rk\, c_{2i} + d_{2i+1} d_{2j+1} \right] v^{2(i+j)+2},$$

откуда следует:

$$a_k = \sum_{i=0}^{2k} (-1)^{k-i} \left[k_0 (r+k) c_i d_{2k-i} + k_0{}^2 rk\, c_i c_{2k-i} + d_i d_{2k-i} \right], \tag{8}$$

где $c_{2k-i} = d_{2k-i} = 0$ при $2k-i > n$; $c_i = d_i = 0$ при $i > n$.

Выражение (8) легко поддается процессу итерации и нахождение коэффициентов a_k полинома $P(v^2)$ водится к однородным вычислительным процедурам.

Для проверки строгой положительности полинома $P(v^2)$ применим инноры [4 - 8]. Из коэффициентов a_k образуем следующие иннорные матрицы:

$$\Delta_{2n-1} = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & & & & & & a_0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & & & & & \ldots & a_0 \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & & & & \ldots & a_1 \\ 0 & \ldots & & & & & & a_1 & 0 \\ 0 & \ldots & & & & & a_1 & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & & & & \ldots \\ 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)\,a_{n2} & \ldots & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)\,a_{n2} & \ldots & a_1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\boxed{\Delta_3 = \begin{matrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & \Delta_1 = na_n & (n-1)\,a_{n-1} \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)\,a_{n2} \end{matrix}}$$

$$\Delta_{2n} = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & & & & & a_0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & & & & a_1 & a_0 \\ 0 & \ldots & \Delta_4 = & & & & & a_1 & 0 \\ 0 & \ldots & & & & & a_1 & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & & & & \ldots \\ 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)\,a_{n2} & \ldots & a_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)\,a_{n2} & \ldots & a_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

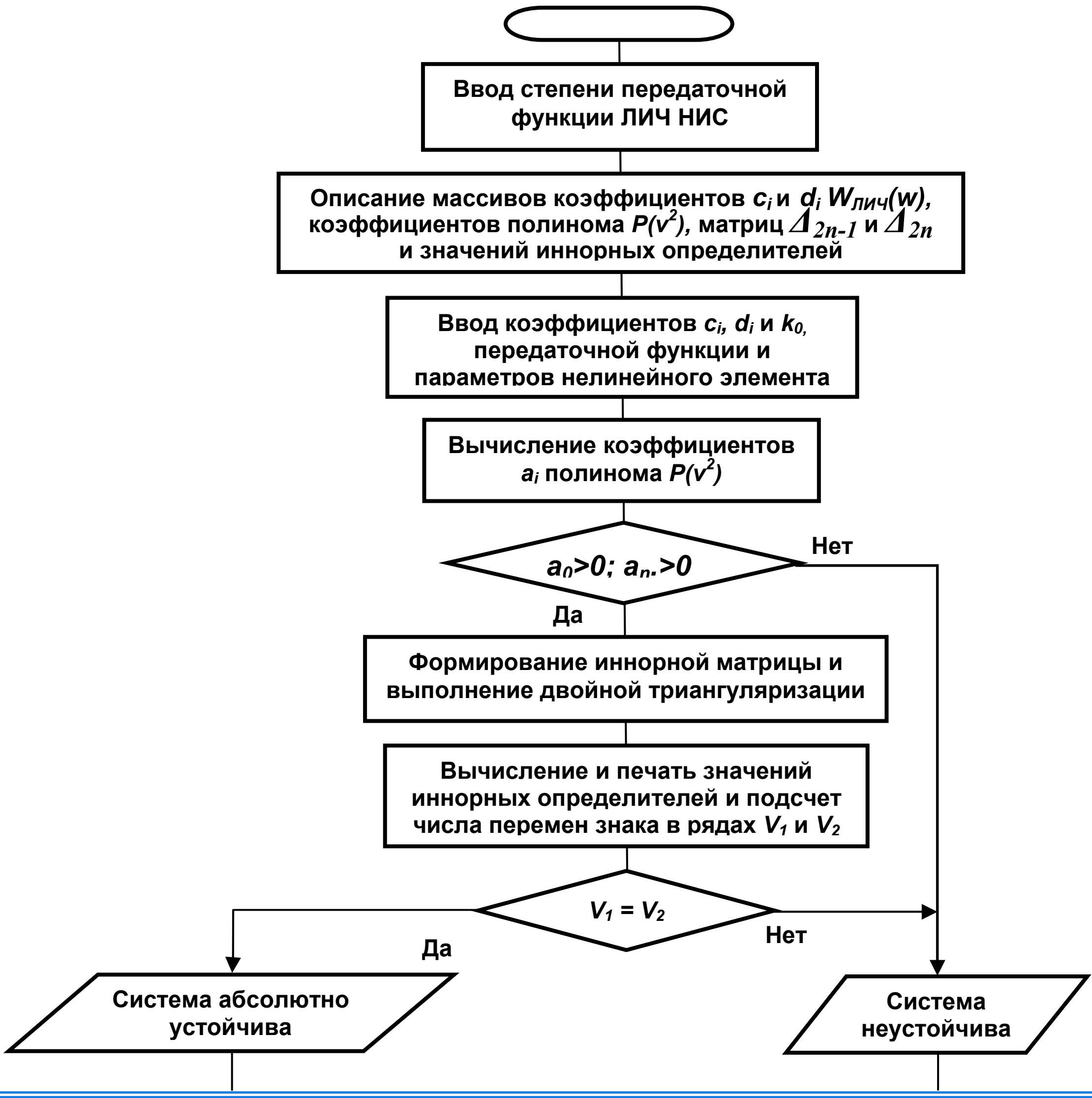
$$\boxed{\Delta_4 = \begin{matrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \\ 0 & \Delta 2 = a_n & a_{n-1\,11111} & a_{n-2} \\ 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)\,a_{n-2} & (n-3)a_{n-3} \end{matrix}}$$

Полином $P(v^2)$ будет строго положителен, если [4]:

$$V_2[1, -\Delta_2, \Delta_4, \ldots, (-1)^n \Delta_{2n}] = V_1[1, \Delta_1, \Delta_3, \ldots, \Delta_{2n-1}]$$

где $\Delta_2, \Delta_4, \ldots, \Delta_{2n}$ – иннорные определители 2, 4 ,…,2n-го порядка матрицы (10); $\Delta_1, \Delta_3, \ldots, \Delta_{2n-1}$ – иннорные определители 1, 3 ,…,2n-1-го порядка матрицы (9). При этом необходимым условием строгой положительности корней полинома является $a_0>0$ и $a_n>0$.

Для вычисления иннорных определителей, матрицы (9) и (10) можно привести к треугольной форме, используя алгоритм Гаусса [9]. Однако наличие в матрицах (9) и (10) левых треугольников нулей обеспечивает чрезвычайную эффективность алгоритма двойной триангуляризации [10, 11], позволяющего с минимальными вычислительными затратами найти значения иннорных определителей, выполнив в 2 – 4 раза меньше проходов по сравнению с алгоритмом Гаусса. На рис. 1 приводится обобщенная схема алгоритма анализа абсолютной устойчивости НИС, реализующая данную процедуру на ЭВМ.



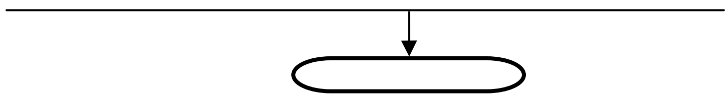


Рис. 1 – Схема алгоритма анализа абсолютной устойчивости НИС

Иллюстративный пример [1]: Проведем анализ абсолютной устойчивости НИС пятого порядка, передаточная функция ЛИЧ которой в *w*-форме имеет вид:

$$W_{ЛИЧ}(w) = 0{,}5\frac{14{,}63w^5 - 189{,}29w^4 + 71{,}704w^3 + 84{,}824w^2 + 17{,}5w + 1}{338{,}72w^5 + 802{,}4w^4 612{,}8w^3 + 150{,}16w^2 + w},$$

Характеристика нелинейного элемента удовлетворяет условию (4) с параметрами $r = 0{,}2$; $k = 5$. В результате работы программы получим:

$$\Delta_1 = 0{,}3881\cdot 10^5; \quad \Delta_3 = 2{,}5975\cdot 10^{15}; \quad \Delta_5 = 2{,}7599\cdot 10^{26}; \quad \Delta_7 = -6{,}5206\cdot 10^{35};$$

$$\Delta_9 = -2{,}621\cdot 10^{39} \quad \Delta_2 = 3{,}118\cdot 10^{10}; \quad \Delta_4 = -9{,}6403\cdot 10^{20}; \quad \Delta_6 = 9{,}848\cdot 10^{39}$$

$$\Delta_8 = 1{,}0964\cdot 10^{38} \quad \Delta_{10} = 5{,}8027\cdot 10^{39}.$$

$$V2\,[\cdot] = V2\,[+,-,-,-,+,-] = 3;\ V1 = V_1\,[+,+,+,-,-,-] = 1.$$

Ряды $V2[\cdot]$ и V_1 неравны, следовательно, исследуемая НИС не является абсолютно устойчивой и необходима коррекция системы.

Литература

1. Цыпкин Я.З., Попков Ю.С. Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973, 416 с.

2. Погорелов В.А., Соколов С.В. Основы синтеза многоструктурных бесплатформенных навигационных систем. Физматлит, 2009. 182 с.

3. Соколов С.В., Синютин С.А. Решение задачи тесной интеграции инерциально-спутниковых навигационных систем, комплексируемых с одометром. Инженерный вестник Дона, 2014, №4, URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N4y2014/2716.

4. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука. 1979, 304 с.

5. Серпенинов О.В., Соколов С.В., Тищенко Е.Н. Криптографическая защита информации. МОН РФ, РГЭУ, 2011, 251с.

6. Смирнов Ю.А., Соколов С.В., Титов Е.В. Основы микроэлектроники и микропроцессорной техники. Лань, 2013, 656 с.

7. Sokolov S.V., Yugov Yu.M. Synthesis of integrated inertial and satellite navigational systems on the basis of stochastic filter, invariant to object model. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, vol. 10, № 1, January 2015, pp. 265-273.

8. Соколов С.В. Синютин С.А. Лукасевич В.И. Тесная интеграция инерциально-спутниковых навигационных систем, комплексируемых с одометром, на основе использования электронных карт. Инженерный вестник Дона, 2014, №4, URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N4y2014/2717.

9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 560 с.

10. Jury I., Ahn S.M. A compulatioal algorithm for inners. IEEE Trans. on Automatic Control. 1972. V. AC-17, pp. 541 – 543

11. Смирнов Ю.А., Соколов С.В., Титов Е.В. Основы нано- и функциональной электроники. Лань, 2013, 448с.

References

1. Tsypkin Ya.Z., Popkov Yu.S. Teoriya nelineynykh impul'snykh sistem [The theory of nonlinear pulse systems]. M.: Nauka, 1973, 416 p.

2. Pogorelov V.A., Sokolov S.V. Osnovy sinteza mnogostrukturnykh besplatformennykh navigatsionnykh system [Basics of synthesis of multi-structured strapdown navigation systems]. Fizmatlit, 2009. 182 p.

3. Sinyutin S.A., Sokolov S.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2009, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N4y2014/2716.

4. Dzhuri E. Innory i ustoychivost' dinamicheskikh sistem. [Innory and stability of dynamic systems]. M.: Nauka. 1979, 304 p.

5. Serpeninov O.V., Sokolov S.V., Tishchenko E.N. Kriptograficheskaya zashchita informatsii [Cryptographic protection of information]. MON RF, RGEU, 2011, 251p.

6. Smirnov Yu.A., Sokolov S.V., Titov E.V. Osnovy mikroelektroniki i mikroprotsessornoy tekhniki [Fundamentals of microelectronics and microprocessor technology]. Lan, 2013, 656 p.

7. Sokolov S.V., Yugov Yu.M., ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, vol. 10, № 1, January 2015, p. 265-273.

8. Sokolov S.V. Sinyutin S.A. Lukasevich V.I. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2009, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N4y2014/2717.

9. Gantmakher F.R. Teoriya matrits [The theory of matrices]. 5-e izd. M.: Fizmatlit, 2004. 560 p.

10. Jury I., Ahn S.M. IEEE Trans. on Automatic Control. 1972. V. AC-17, pp. 541 – 543.

11. Smirnov Yu.A., Sokolov S.V., Titov E.V. Osnovy nano- i funktsional'noy elektroniki [Basics of nanotechnology and functional electronics]. Lan, 2013, 448 p.