Инженерный вестник Дона, №12 (2021)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n12y2021/7388

Сравнительный анализ естественной частоты консольной балки с помощью аналитического и программного подхода

В.А. Кириллова, Л.Ю. Рыбакова

Самарский государственный технический университет

Аннотация: Гибкие конструкции обычно имеют низкую гибкую жесткость и небольшой коэффициент демпфирования материала. Небольшое возбуждение может привести к разрушающей вибрации большой амплитуды и длительному времени восстановления. Это, в свою очередь, может привести к усталости, нестабильности и плохой работе конструкций. Контроль вибрации гибких конструкций является важной проблемой во многих инженерных приложениях, особенно для точных рабочих характеристик в аэрокосмических системах, спутниках, гибких манипуляторах и т.д.

Ключевые слова: собственная частота, гибкая жесткость, вибрация, уравнение Лангранжа, метод Эйлера, демпфирующая сила, теория балки.

Введение: Балка представляет собой наклонный или горизонтальный конструктивный элемент, охватывающий расстояние между одной или дополнительными опорами и несущий вертикальные нагрузки поперек ее продольной оси в виде прогона, балки или стропила.

Гибкие конструкции обычно имеют низкую гибкую жесткость и небольшой коэффициент демпфирования материала. Небольшое возбуждение может привести к разрушительной вибрации большой амплитуды и долгому времени установления. Это может привести к усталости, нестабильности и плохой работе конструкций. Контроль вибрации гибких конструкций является важной проблемой во многих инженерных приложениях, особенно для точных рабочих характеристик в аэрокосмических системах, спутниках, гибких манипуляторах и т.д. Основная составляющая конструкций широко используется в аэрокосмической отрасли, в высокоскоростном оборудовании, в легких конструкциях и испытывает широкий спектр статических и динамических нагрузок определенной частоты вибрации, что приводит к ее выходу из строя из-за резонанса. Испытания на вибрацию стали стандартной процедурой при проектировании и развитии большинства инженерных систем. Система при

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2021

недостаточной вибрации будет вибрировать на одной или нескольких собственных частотах, что является характеристикой динамической природы системы. Собственная частота не зависит от демпфирующей силы, поскольку влияние демпфирования на собственную частоту очень невелико. Теория пучка Эйлера-Бернулли является наиболее часто используемой, поскольку она проста и обеспечивает реалистичные инженерные приближения для многих проблем.

Аналитический метод: Динамические системы можно охарактеризовать с помощью одной или нескольких собственных частот. Собственная частота - это частота, на которой система будет вибрировать, если ей будет дано начальное возмущение, а затем будет позволено свободно вибрировать. Существует множество доступных методов определения собственной частоты. Некоторые методы перечислены ниже [1-3]:

- Закон движения Ньютона
- Метод Рэлея
- Энергетический метод
- Уравнение Лагранжа.
- Метод Эйлера.

Методы Рэлея, энергии и Лагранжа тесно связаны: некоторые из этих методов напрямую определяют собственную частоту. Другие приводят к основному уравнению движения, из которого может быть определена собственная частота. Обычно для расчета используется уравнение Эйлера-Бернулли. По теории балки Эйлера-Бернулли предполагается, что [4-5]:

- Плоскость сечения, перпендикулярная оси балки, остается плоской после деформации.

- Деформированная плоскость поперечного сечения остается перпендикулярной оси после деформации.
- Теория балки не учитывает деформацию поперечного сдвига, а поперечный сдвиг определяется уравнением равновесия [6].

Метод Эйлера-Лагранжа. Уравнение Лагранжа было разработано в 1750-х годах Эйлером и Лагранжем в связи с их исследованиями проблемы таутохрон. Это проблема определения кривой, на которой взвешенная частица упадет в фиксированную точку за фиксированный промежуток времени, независимо от начальной точки. Лагранж решил эту проблему в 1755 году и отправил решение Эйлеру. Оба далее развили метод Лагранжа и применили его к механике, что привело к формулировке лагранжевой механики. Их переписка в конечном итоге привела к исчислению вариаций - термин, введенный самим Эйлером в 1766 году [7-9].

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$L_x\big(t, q(t), q'(t)\big) - \frac{d}{dt} L_v\big(t, q(t), q'(t)\big) = 0$$

где L_x и L_v обозначают частные производные L по второму и третьему аргументам соответственно. Если размерность пространства X больше 1, это система дифференциальных уравнений, по одному для каждого компонента [10]:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}\big(t, q(t), q'(t)\big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i}\big(t, q(t), q'(t)\big) = 0 \quad \text{для } i = 1$$

Формула Эйлера:

$$\omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

$$\omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{E * b^3 * d}{p * b * d * 12 * L^4}}$$

$$\omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{E * b^2}{p * 12 * L^4}}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

Где W_n – угловая частота балки; $\propto_n$ – константа конечного условия E-модуль Юнга; I- момент инерции; L- длина балки.

Аналитические результаты:

Таблица №1

Образцы

Материал	Плотность (кг/м^3)	Модуль Юнга (Gpa)	Коэффициент Пуассона
Алюминий	2700	70	0.32
Мягкая сталь	7850	200	0.29
Медь	8940	117	0.33

Алюминий:

Свойства: Модуль Юнга (Н / мм2) = E = 70.

Плотность (кг / м3) = ρ = 2700.

Размер: Длина (мм) = L = 150. Ширина (мм) = b = 25. Толщина (мм) = d = t = 3

Вычисления:

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2021

$$\omega_n = (1.875)^2 \sqrt{\frac{0.69 * 10^{11} * 0.003^2}{12 * 2700 * 0.15^4}} = 684.05\,\text{рад}/c$$

$$= 684.05 * 0.1592 Hz = 108.90 Hz$$

$$f_n = 17.33 Hz$$

Мягкая сталь:

Свойства: Модуль Юнга (Н / мм2) = E = 200.

Плотность (кг / м3) = ρ = 7850.

Размеры: Длина (мм) = L = 150 Ширина (мм) = b = 30. Толщина (мм) = t = 25

$$\omega_n = (1.875)^2 \sqrt{\frac{2.1 * 10^{11} * 0.003^2}{12 * 7850 * 0.15^4}} = 699.88\,\text{рад}/c$$

$$= 699.88 * 0.1592 Hz = 111.42 Hz$$

$$f_n = 17.73 Hz$$

Медь:

Свойства: Модуль Юнга (Н / мм2) = E = 117.

Плотность (кг / м3) = ρ = 3940.

Размеры: Длина (мм) = L = 150. Ширина (мм) = b = 25 Толщина (мм) = t = 3

$$\omega_n = (1.875)^2 \sqrt{\frac{1.2 * 10^{11} * 0.003^2}{12 * 8933 * 0.15^4}} = 495.95\,\text{рад}/c$$

$$= 413.296 * 0.1592 Hz = 78.95 Hz$$

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2021

$$f_n = 12.56Hz$$

Таблица №2

Результат подсчетов

Алюминий	Мягкая сталь	Медь
17.33	17.73	12.56

Таблица №3

Результат программного подхода

Алюминий	Мягкая сталь	Медь
13.5	15	12.5

Таблица №4

В итоге

Материалы	Аналитический метод	Экспериментальный метод
Алюминий	17.33	13.5
Мягкая сталь	17.73	15
Медь	12.56	12.5

Заключение.

- Резонансную частоту, полученную экспериментально при первом режиме колебаний всех трех образцов, можно сравнить с теоретическим результатом.
- Имеется хорошее согласие теоретически рассчитанной собственной частоты с экспериментальной.

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2021

- Эксперимент показывает, что демпфирование меди выше, чем у алюминия и стали, а у алюминия - меньше всего.
- Демпфирование материала уменьшается с увеличением собственной частоты консольного образца для каждого материала.

Литература

1. Garasa P.M & Medalay Tilania. Analysis of automotive material under impact loads and energy levels. 2001. pp. 218-234.

2. John Pemberton. A study of early corrugated iron building in rural Scotland. Volume 3. 2001. pp. 351-356.

3. Hans Toder. Building Construction 2004. p. 169.

4. Ishamil Balu. Case study on mechanical properties of concrete course aggregate using recycled plastic. 2005. pp. 112-129.

5. AS, NZS 4600:2003 Australian / New Zealand Standard. Cold-formed steel structures. Sydney Wellington: Standards Australia Standards New Zealand, 2003.pp. 413-421.

6. Tusnina, O.A. A finite element analysis of cold-formed Z-purlins supported by sandwich panels. Applied Mechanics and Materials. 2013. pp. 257-274.

7. EN 1993-1-3:2004. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-3: General rules. Supplementary rules for cold-formed members and sheeting. Brussels: CEN, 2004. pp. 204-209.

8. Mark Isaev. Applications of Finite Element Analysis in Structural Engineering. Proceedings International Conference on Computer Aided Engineering. 2007. pp. 26-58.

9. Лавыгин Д.С., Леонтьев В.Л. Алгоритм смешанного метода конечных элементов решения задач теории отказов. Инженерный вестник Дона, 2013. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/1910

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2021

10. Устименко Е.Е., Скачков С.В. Метод конечных элементов. Инженерный вестник Дона. 2019. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2019/5768

References

1. Garasa P.M & Medalay Tilania. Analysis of automotive material under impact loads and energy levels. 2001. pp. 218-234.

2. John Pemberton. A study of early corrugated iron building in rural Scotland. Volume 3. 2001. pp. 351-356.

3. Hans Toder. Building Construction, 2004. p. 169.

4. Ishamil Balu. Case study on mechanical properties of concrete course aggregate using recycled plastic. 2005. pp. 112-129.

5. AS,NZS 4600:2003 Australian/New Zealand Standard. Cold-formed steel structures. Sydney Wellington: Standards Australia Standards New Zealand, 2003. pp. 413-421.

6. Tusnina, O.A. Applied Mechanics and Materials. 2013. pp. 257-274.

7. EN 1993-1-3:2004. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-3: General rules. Supplementary rules for cold-formed members and sheeting. Brussels: CEN, 2004. pp. 204-209.

8. Mark Isaev. Applications of Finite Element Analysis in Structural Engineering. Proceedings International Conference on Computer Aided Engineering. 2007. pp. 26-58.

9. Lavygin D.S., Leontev V.L. Inzhenernyj vestnik Dona. 2013. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/1910

10. Ustimenko E.E., Skachkov S.V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2019. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2019/5768