О некоторых задачах синтеза оптимального управления с матричной и векторной составляющими в системе Риккати

У.А. Сактанов, Б.О. Кочконбаева, А.И. Сиянов, Д.К. Ярошевич

Лысьвенский филиал «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», г. Лысьва

Аннотация: Сформулирована задача синтеза оптимального управления и учтена матричная и векторная составляющие в системе Риккати. Для определения закономерностей использован метод динамического программирования Беллмана. Рассмотрена конкретная математическая модель процесса колебаний и численно исследованы свойства. Приведены примеры линейной и квазилинейной задачи и определено наименьшее возможное значение критерия качества. Построены соответствующие графические зависимости и с помощью инструментария оптимального управления осуществлен перевод состояния объекта из одной точки в другую. Путем использования метода степенных рядов Зубова выявлено оптимальное управление. Произведены численные расчеты и получены функции Риккати в нелинейной системе с сосредоточенными параметрами.

Ключевые слова: задачи синтеза, оптимальное управление, матричная и векторная составляющие, система Риккати, процесс колебаний, критерии качества.

Введение

В решении задач синтеза оптимального управления линейными системами с сосредоточенными параметрами широко используется матричное дифференциальное уравнение типа Риккати [1–3].

Известно, что при постоянных коэффициентах линейной системы с сосредоточенными параметрами решение уравнения Риккати имеет интервалы стационарности. Эти стационарные значения успешно используются для алгоритмов управления и стабилизации [4].

Если минимизируется отклонение системы с сосредоточенными параметрами от ненулевой величины, то в системе Риккати, кроме известного матричного уравнения, присутствует векторное уравнение, векторная составляющая [5, 6]. На данный момент свойства векторной составляющей не достаточно изучены. Поэтому, как следствие, в рамках данной статьи численно исследуется векторная составляющая системы Риккати.

Постановка линейной задачи

Пусть математическая модель управляемого процесса имеет вид:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t) + f, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где A, b, f – постоянные матрицы $n \times n$, $n \times 1$ соответственно, $x(t)$ – n-мерный вектор, характеризующий состояние процесса, $u(t)$ – скалярное управление.

Задан критерий качества:

$$J = \gamma_1 \int_0^T (x(t) - g)^* Q(x(t) - g)dt + \gamma_2 (x(T) - g)^* F(x(T) - g) + \beta \int_0^T u^2(t)dt, \tag{2}$$

где (*) – символ транспонирования; F и Q – положительно определенные матрицы; g – числовой вектор-столбец; постоянные – γ_1, $\gamma_2 \geq 0$, $\beta > 0$; T – конечный момент времени.

В рамках задачи найдем управление $u^0(t)$ и соответствующее ему решение $x^0(t)$ задачи Коши (1) так, чтобы критерий качества (2) принимал наименьшее возможное значение.

Для решения используем метод динамического программирования Беллмана [3, 7].

Пусть в критерии качества (2) желаемое состояние $g(t) \equiv g = \text{const} \neq 0$.

Имеем вспомогательную систему типа Риккати, состоящую из матричного, векторного и скалярного дифференциальных уравнений вида [5, 8]:

$$-\frac{dK(t)}{dt} = Q + KA + A^* K - \frac{1}{\beta} Kbb^* K, \quad K(T) = \gamma_2 F,$$

$$-\frac{d\varphi(t)}{dt} = -2Qg + A^* \varphi - \frac{1}{\beta} Kbb^* \varphi + 2Kf, \quad \varphi(T) = -2\gamma_2 Fg,$$

$$-\frac{d\eta(t)}{dt} = g^* Qg + \varphi^*(t) bb^* \varphi(t) + f^* \varphi(t), \quad \eta(T) = \gamma_2 g^* Fg. \tag{3}$$

Оптимальное синтезирующее управление вычисляем по формуле [4]:

$$u^0(t) = -\frac{1}{2\beta} b^* \{2K(t)x(t) + \varphi(t)\}. \tag{4}$$

Численно исследуем свойства вектора φ(t). Рассмотрим конкретную математическую модель процесса колебаний вида (1):

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{3}x(t) + y(t) + u_1(t) + f_1, \quad x(0) = -1,$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -x(t) + z(t) + u_2(t) + f_2, \quad y(0) = 1,$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = -6x(t) - y(t) - z(t) + u_3(t) + f_3, \quad z(0) = 2.$$

Пусть $g = (g_1, g_2, g_3,)^* = (3, 3, 3)^*$, $f = (f_1, f_2, f_3,)^* = (0, 0, 0)^*$.

При нулевом управлении $u(t) \equiv 0$ получаем графики, изображенные на рис. 1.

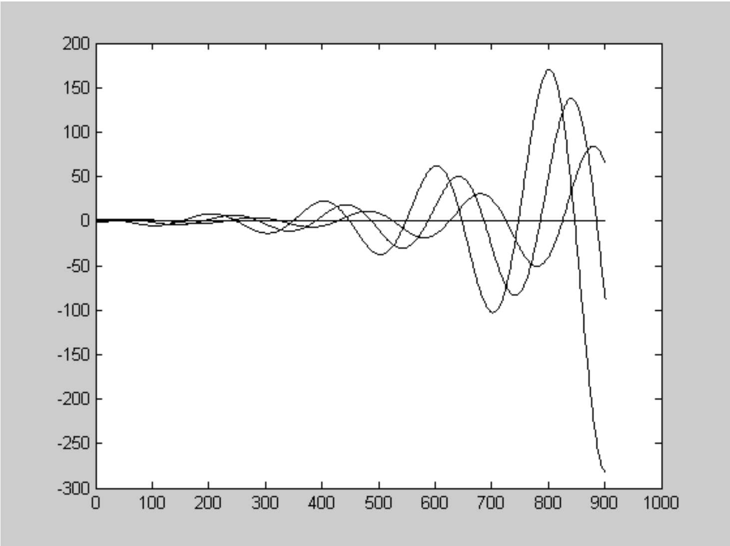

Рис. 1. – Состояние объекта (1) при нулевом управлении $u(t) \equiv 0$

Построим управление, обеспечивающее перемещение решения ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$) системы (1) в окрестность g.

В алгоритме управления используем стационарные значения матричной и векторной составляющих $K(t) \equiv c_1$, $\varphi(t) \equiv c_2$:

$$u^0(t) = -\frac{1}{2\beta} b^* \{2c_1 x(t) + c_2\}, \tag{5}$$

где c_1 – квадратная матрица, c_2 – вектор-столбец.

Результаты расчетов приведены на рис. 2 – 4.

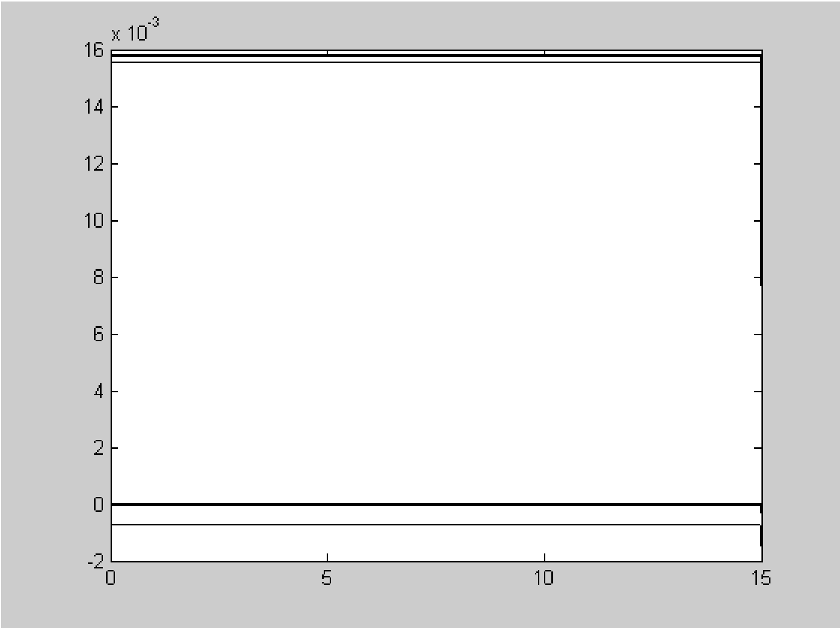

Рис. 2. – Матричные функции Риккати $k_{ij}(t)$ в (3)

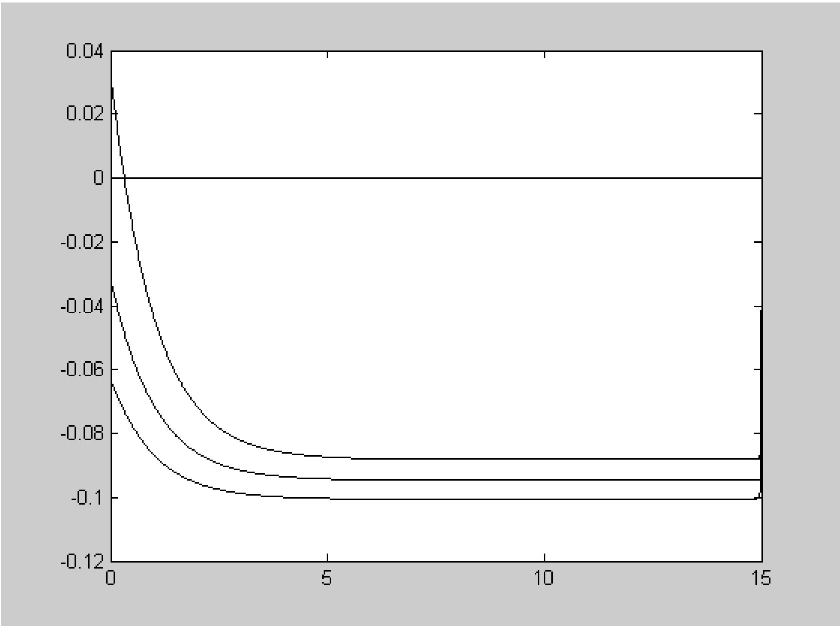

Рис. 3. – Векторные функции Риккати $\varphi_i(t)$ в (3)

В рассмотренном примере осуществлен перевод состояния объекта из начальной точки в окрестность заданной конечной точки g с помощью управления при соответствующем параметре β.

Видно (рис. 2, 3), что компоненты матричной $K(t)$ и векторной функций $\varphi(t)$ имеют интервалы стационарности.

Управления (4) и (5) переводят процесс из начального состояния (–1, 1, 2) в заданное состояние (3, 3, 3) с удовлетворительной точностью. Соответствующие графики имеет одинаковую закономерность и изображены на рис. 4.

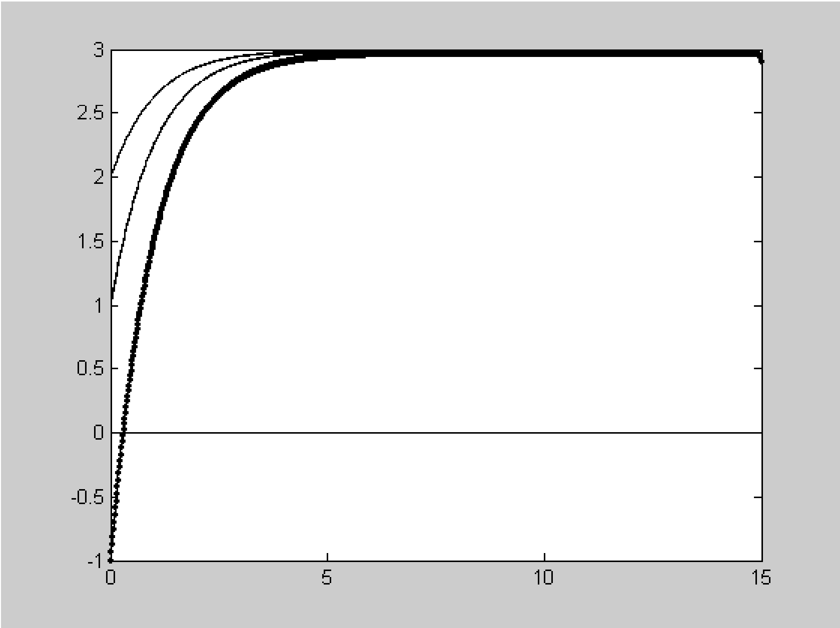

Рис. 4. – Состояние объекта (1) при управлении (4) и (5)

Постановка квазилинейной задачи

Пусть управляемый процесс [9, 10] описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax + Bu(t) + b(x)u(t), \quad x(0) = x_0, \tag{6}$$

где $x(t)$ – скалярная функция; $u(t)$ – скалярное управление; $t \in [0, T]$; полином $b(x) = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$; A, B, b_1, b_2, b_3, x_0, T – постоянные.

Критерий качества управления имеет вид:

$$J = \int_0^T \left(x^2 + \beta u^2\right)dt + \Phi_0 + \Phi_1 x(T) + \Phi_2 x^2(T), \tag{7}$$

где постоянные β, Φ_0, Φ_1, $\Phi_2 > 0$.

В рамках задачи найдем управление $u^0(t)$ и соответствующее ему решение $x^0(t)$ задачи Коши (6) так, чтобы критерий качества (7) принимал наименьшее возможное значение.

Такую задачу решаем методом динамического программирования Беллмана [3, 7] и для решения уравнения воспользуемся методом степенных рядов Зубова [8].

В результате оптимальное управление представим в виде:

$$u^0(t) = -\frac{1}{\beta}(B + b(x))\frac{\partial S}{\partial x},$$

где $S(t, x(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i(t) x^i(t), \quad S(T, x) = \Phi_0 + \Phi_1 x(T) + \Phi_2 x^2(T)$.

Вспомогательная бесконечная система типа Риккати имеет вид:

$$-\frac{dk_1(t)}{dt} = Ak_1 - \frac{B^2}{\beta}k_1k_2 - \frac{b_1b_2}{2\beta}k_1, \quad k_1(T) = \Phi_1;$$

$$-\frac{dk_2(t)}{dt} = 1 + 2Ak_2 - \frac{B^2}{4\beta}(4k_2^2 + 6k_1k_3) - \frac{2Bb_1}{\beta}k_1k_2 - (\frac{Bb_2}{2\beta} + \frac{b_1^2}{4\beta})k_1^2, \quad k_2(T) = \Phi_2;$$

$$-\frac{dk_3(t)}{dt} = 3Ak_3 - \frac{B^2}{4\beta}(8k_1k_4 + 12k_2k_3) - \frac{Bb_1}{2\beta}(6k_1k_3 + 4k_2^2) - \frac{2Bb_2}{\beta}k_1k_2 - \frac{Bb_3}{2\beta}k_1^2 -$$

$$-\frac{b_1}{\beta}k_1k_2 - \frac{b_1b_2}{2\beta}k_1^2, \quad k_3(T) = 0; \ \ldots \text{ и т.д.} \qquad (8)$$

Численные расчеты выполнены при следующих значениях параметров:

$$T = 6.5; \quad n = 1200; \quad A = 1; \quad B = 0.5; \quad b_1 = 1; \quad b_2 = 2; \quad b_3 = 3;$$

$$\Phi_0 = 0.1; \quad \Phi_1 = 0.2; \quad \Phi_2 = 0.3; \quad \beta = 0.01; \quad x_0 = 0.8.$$

Решения системы (8) приведены на рис. 5.

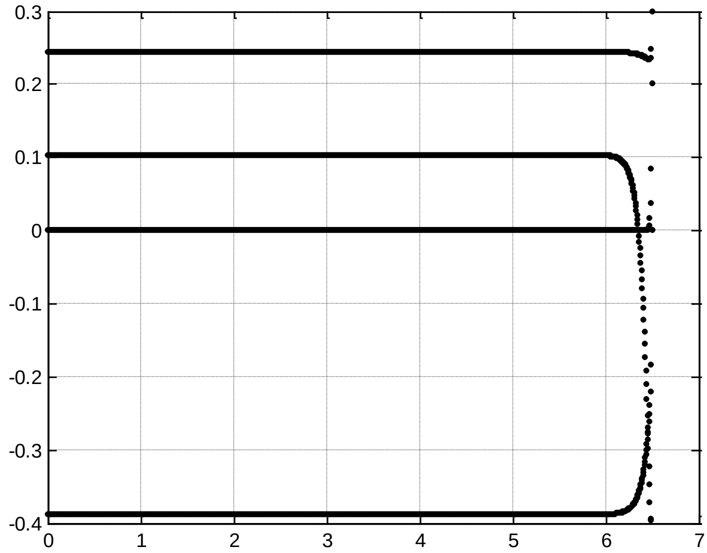

Рис. 5. – Функции Риккати $k_1(t)$, $k_2(t)$, $k_3(t)$, $k_4(t)$ в нелинейной системе с сосредоточенными параметрами (8)

На рис. 5 в интервале времени (0, 6) показаны стационарные значения k_i, (i = 1, …,4) первых четырех функций – решений $k_1(t)$, $k_2(t)$, $k_3(t)$, $k_4(t)$ системы (8):

$$k_1 = 2.9760 \cdot 10^{-221};\ k_2 = 0.2440;\ k_3 = -0.3891;\ k_4 = 0.1032.$$

Выводы

1. Рассмотрена математическая модель процесса колебаний и выполнены численные исследования свойств. Приведены примеры задач и определено наименьшее возможное значение критерия качества.

2. Построены соответствующие графические зависимости и выявлено оптимальное управление. В линейной и квазилинейной системе определены интервалы стационарности решений векторной составляющей системы типа Риккати.

3. Произведены численные расчеты и выведены функции в нелинейной системе с сосредоточенными параметрами. Стационарные значения использованы в алгоритмах управления.

Литература

1. Mikkola K. Riccati equations and optimal control of well-posed linear systems // Mathematics / arXiv: Optimization and Control. 2016. URL: researchgate.net/publication/301841081.

2. Mokhtarzadeh M.R., Pournaki M.R., Razani A. A note on periodic solutions of Riccati equations // Nonlinear Dynamics. 2010. Vol. 62 (1). URL: link.springer.com/article/10.1007/s11071-010-9703-9.

3. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 551 с.

4. Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С. Лекции по теории стабилизации. Екатеринбург: Уральский гос. ун-т им. А.М. Горького, 1972. 273 с.

5. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Наука, 2004. 504 с.

6. Шаршеналиев Ж.Ш., Самохвалова Т.П., Сактанов У.А. Моделирование и оптимизация управляемых технологических процессов. Бишкек: Илим, 2009. 242 с.

7. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960. 400 с.

8. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.

9. Андрашитов Д.С., Костоглотов А.А., Костоглотов А.И., Лазаренко С.В., Ценных Б.М. Универсальный метод синтеза оптимальных управлений нелинейными Лагранжевыми динамическими системами // Инженерный вестник Дона, 2014, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2251.

10. Пшихопов В.Х., Медведев М.Ю. Алгоритмическое обеспечение робастных асимптотических наблюдателей производных // Инженерный вестник Дона, 2011, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2011/431.

References

1. Mikkola K. Mathematics. arXiv: Optimization and Control. 2016 URL: researchgate.net/publication/301841081.

2. Mokhtarzadeh M.R., Pournaki M.R., Razani A. Nonlinear Dynamics. 2010. Volume 62 (1) URL: link.springer.com/article/10.1007/s11071-010-9703-9.

3. Roytenberg YA.N. Avtomaticheskoe upravlenie [Automatic control]. M.: Nauka, 1978. 551 p.

4. Al′brekht EH.G., Shelement′ev G.S. Lektsii po teorii stabilizatsii. [Lectures on the theory of stabilization]. Yekaterinburg: Ural′skiy gos. un-t im. A.M. Gor′kogo, 1972. 273 p.

5. Egorov A.I. Osnovy teorii upravleniya [Fundamentals of management theory]. M.: Nauka, 2004. 504 p.

6. Sharshenaliev ZH.SH., Samokhvalova T.P., Saktanov U.A. Modelirovanie i optimizatsiya upravlyaemykh tekhnologicheskikh protsessov [Modeling and optimization of controlled technological processes]. Bishkek: Ilim, 2009. 242 p.

7. Bellman R. Dinamicheskoe programmirovanie [Dynamic programming]. M.: IL, 1960. 400 p.

8. Zubov V.I. Lektsii po teorii upravleniya [Lectures on management theory]. M.: Nauka, 1975. 495 p.

9. Andrashitov D.S., Kostoglotov A.A., Kostoglotov A.I., Lazarenko S.V., Tsennykh B.M. Inzhenernyj vestnik Dona, 2014, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2251.

10. Pshikhopov V.KH., Medvedev M.YU. Inzhenernyj vestnik Dona, 2011, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2011/431.