

Применение метода усреднения в задаче о продолжительном нагружении слоистого упруго-ползучего композита

Т.Н. Бобылева

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва

Аннотация: В работе представлены аналитические оценки близости решений краевых задач для широко используемых в технике упруго-ползучих слоистых композиционных материалов при их длительном нагружении, а также дана соответствующая усредненная модель для таких материалов. Оценки показывают возможность использования усредненной модели на большом интервале времени для задачи нагружения постоянно действующим силовым воздействием. Ранее это утверждение было подтверждено численными экспериментами по сравнению решений краевых задач для эффективной (усредненной) модели и прямым численным расчетом с использованием исходной модели для сильно неоднородного слоистого материала. Аналитические оценки основаны на ранее полученных оценках близости решений стационарных задач теории упругости. Для рассматриваемой в данной работе одномерной модели установлено следующее свойство: если определяющие соотношения для различных фаз композиционного материала записать как зависимости деформаций от напряжений, то коэффициенты для такой же формы записи определяющих соотношений усредненной модели получаются как простые средневзвешенные значения аналогичных коэффициентов для отдельных фаз.

Ключевые слова: слоистые композиционные материалы, теория ползучести, метод усреднения, оценки эффективности метода усреднения, асимптотически большой интервал времени.

Слоистые композиционные материалы используются в строительстве, машиностроении, авиастроении, приборостроении, химической, нефтехимической промышленности и ряде других отраслей. Они применяются в качестве несущих конструкций, переходников, приспособлений и деталей с особыми свойствами. Такие материалы обладают уникальным набором механических и эксплуатационных свойств. Они позволяют создавать новые конструкции с высокими характеристиками и надежностью [1-3].

В данной статье мы исследуем применение метода усреднения для длительного промежутка времени к исследованию композиционных материалов. Первые примеры применения метода усреднения к задачам теории упругости приведены в [4-6]. Теория ползучести, наследственная

теория упругости, теория длительной прочности применительно к бетону, металлам при высоких температурах, высокомолекулярным соединениям представлены в [7-9].

Особенностью задачи, рассматриваемой в нашей статье, является анализ возможности применения метода усреднения на большом интервале времени, т.е. процесс длительного нагружения образца из композитного материала. Вопрос об использовании метода усреднения для композитов из упруго- ползучих фаз рассматривался в ряде работ, например, [10-12]. Задачи для тонкого периодически перфорированного упругого стержня рассмотрены в [13,14]. В этих работах ставилась цель определить эффективные характеристики на изгиб, растяжение и кручение в явном аналитическом виде. В работе [15] исследован вопрос о пределах применимости метода усреднения для слоистого упруго-ползучего композита. С помощью прямого численного эксперимента было показано, что при количестве слоев более десяти может быть применен метод усреднения для решения задачи о продолжительном нагружении слоистого образца. При этом в прямом расчете для сильно неоднородной среды используется метод конечных элементов с линейными размерами элементов, в несколько раз меньшими толщины слоя в образце слоистого композита.

Естественно, возникает вопрос о строгом выводе аналитических оценок близости решения, полученного методом усреднения задачи о длительном нагружении образца, и решения исходной (неусредненной) задачи для сильно неоднородного материала. Понятно, что такие оценки должны включать время нагружения, количество слоев в образце, величину приложенной постоянной нагрузки и другие параметры задачи, такие, как геометрические параметры и параметры жесткости и ползучести отдельных фаз композита. Оценка такого рода близости дана в данной работе. В этом случае аналитическая оценка выводится для одномерной задачи, которая называется

«стержневым приближением» в теории упругости. Однако, даже для такой задачи получение аналитической оценки близости решения исходной краевой задачи и решения соответствующей краевой задачи для усредненной модели не является тривиальным вопросом, поскольку речь идет об асимптотически большом интервале времени, на котором сравниваются решения. Приведенные в статье оценки основаны на аналогичных оценках решений стационарных задач теории упругости, полученных в [1].

Постановка задачи и ее решение.

Рассмотрим одномерную систему, состоящую из участков вязкоупругого материала, которые имеют разные характеристики и чередуются с периодом ε , являющимся малым параметром. Будем считать, что имеются две фазы материала. В пределах одной фазы характеристики вязкоупругости не зависят от пространственной переменной x . Длина отрезка, занимаемого композитным материалом из двух фаз, равна L , длина каждого отрезка, соответствующего одной фазе, равна $\frac{L}{n} = \varepsilon$, n - количество отрезков чередующихся участков материала. (Рис.1).

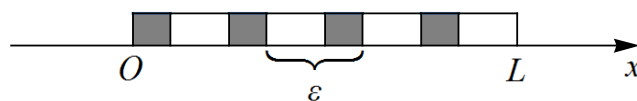


Рис. 1. – Вязкоупругий материал, состоящий из двух чередующихся фаз

Наша задача - описать динамику такой системы в среднем, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, то есть построить усредненную, или эффективную модель описанной системы. Для этого мы зададим определяющие отношения для каждой из двух фаз композита. Пусть $\sigma^i(x,t)$ и $e^i(x,t)$ ($i=1,2$) - это соответственно напряжения и деформации каждой из фаз (переменная t обозначает время), связь между ними задается соотношением:

$$e^i(x, t) = J^i \sigma(x, t) + \int_0^t K^i(t - \tau) \sigma(x, \tau) d\tau \quad (1)$$

или обратным соотношением:

$$\sigma^i(x, t) = E^i e(x, t) + \int_0^t Q^i(t - \tau) e(x, \tau) d\tau. \quad (2)$$

В формулах (1-2) $K_i(t), Q_i(t)$ - ядра ползучести и релаксации каждой из двух фаз. В изображениях Лапласа эти соотношения принимают следующий вид:

$$\tilde{e}^i(x, p) = J^i \tilde{\sigma}(x, p) + \tilde{K}^i(p) \cdot \tilde{\sigma}(x, p), \quad (3)$$

$$\tilde{\sigma}^i(x, p) = E^i \tilde{e}(x, p) + \tilde{Q}^i(p) \cdot \tilde{e}(x, p). \quad (4)$$

Преобразование Лапласа функции $F(t)$ задается следующей формулой:

$$\tilde{F}(p) = \int_0^{\infty} F(t) e^{-pt} dt, \quad (5)$$

где p - комплексный параметр.

Если выполнена оценка $|f(t)| \leq C e^{K^* t}$, то $\tilde{f}(p)$ функция, как хорошо известно, аналитична в правой полуплоскости $\text{Re } p \geq K^*$ (Рис. 2).

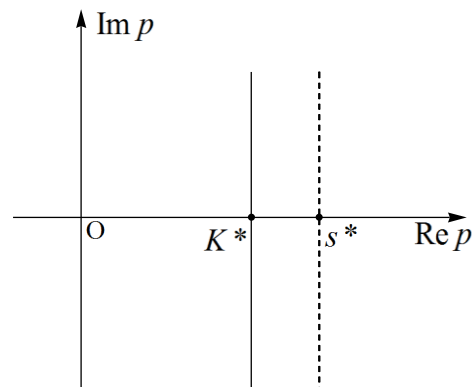


Рис. 2. – Плоскость комплексного параметра p . При вычислении обратного преобразования Лапласа интегрирование выполняется по пунктирной линии

Обратное преобразование Лапласа задается формулой:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s^* - i\infty}^{s^* + i\infty} \tilde{F}(p) e^{pt} dp, \quad (6)$$

где $s^* > K^*$.

Пусть $u(x, t)$ - перемещение точек рассматриваемого композиционного материала, тогда деформация равна: $e(x, t) \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$. Пусть система закреплена в точках $x = 0, x = L$, то есть $u(0, t) = u(L, t) = 0$, и на нее действует внешняя сила $f(x, t)$. Тогда уравнение квазистатического равновесия процесса ползучести рассматриваемого композита вместе с краевыми условиями примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(E \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \int_0^t Q \left(\frac{x}{\varepsilon}, t - \tau \right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} d\tau \right) = f(x, t), x \in [0, L], t \geq 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $E \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)$ и $Q \left(\frac{x}{\varepsilon}, t - \tau \right)$ - функции, принимающие значения E^1 и $Q^1(t - \tau)$ на отрезке длины $h\varepsilon$ и $E^2, Q^2(t - \tau)$ на отрезке длины $(1 - h)\varepsilon$, ($0 < h < 1$) из которых составлен композит с чередующимися фазами.

Преобразование Лапласа соотношений (7) приводит к следующему уравнению и краевым условиям:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[\tilde{E} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \tilde{Q} \left(\frac{x}{\varepsilon}, p \right) \right] \frac{\partial \tilde{u}(x, p)}{\partial x} = \tilde{f}(x, p), x \in [0, L], \\ \tilde{u}(0, p) = \tilde{u}(L, p) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где p - комплексный параметр в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq K^*$ (Рис. 2). При фиксированном p асимптотика задачи (8) хорошо изучена [1]. В [1] было доказано, что решение задачи (8) стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению $\tilde{u}_0(x, p)$ следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(A^{\text{hom}}(p) \frac{\partial \tilde{u}_0(x, p)}{\partial x} \right) = \tilde{f}(x, p), x \in [0, L], \\ \tilde{u}_0(0, p) = \tilde{u}_0(L, p) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

При этом величина $A^{\text{hom}}(p)$ задается формулой:

$$A^{\text{hom}}(p) = \left[\frac{H}{E^1 + Q^1(p)} + \frac{1-H}{E^2 + Q^2(p)} \right]^{-1}, \quad (10)$$

здесь H - толщина слоя (в обозначениях, использованных в [1]).

Для решений задач (7) и (8) справедлива следующая оценка:

$$\|u_\varepsilon(x, p) - u_0(x, p)\|_{L_2(0,L)} \leq \varepsilon \frac{[M(p) + \delta_0(p)] \frac{\sqrt{2}}{\delta_0(p)}}{\delta_0(p)} \|\tilde{f}(x, p)\|_{L_2(0,L)}, \quad (11)$$

$$\delta_0(p) \leq A^{\text{hom}}(p) \leq M(p). \quad (12)$$

Формула (11) еще не дает возможности перейти к исходным переменным (t, x) и получить оценку близости решений исходной и усредненной задач в этих переменных. В самом деле, постоянные δ_0 и M зависят от комплексного параметра p , а при использовании формулы (6) обратного преобразования Лапласа для оценки интеграла необходимы явные оценки для этих постоянных как функций от p . Эти оценки будут даны для ядер K^i и Q^i конкретного вида. А сейчас заметим, что формулу (10) можно записать в иной форме. Из соотношений (3), (4) следует, что $[E^i + \tilde{Q}^i(p)]^{-1} = J^i + \tilde{K}^i(p)$, поэтому, используя (9), получим:

$$\left[(J^1 + \tilde{K}^1(p))H + (J^2 + \tilde{K}^2(p))(1-H) \right]^{-1} \tilde{\varepsilon} = \tilde{f}(x, p). \quad (13)$$

Следовательно,

$$\tilde{\varepsilon}(x, p) = \left[(J^1 + \tilde{K}^1(p))H + (J^2 + \tilde{K}^2(p))(1-H) \right] \tilde{\sigma}(x, p). \quad (14)$$

Формула (14) утверждает, что при усреднении определяющего соотношения (1) в форме зависимости перемещений от напряжений можно усреднить его непосредственно. Именно, вместо постоянных податливости и ядер свертки для двух различных фаз следует взять их обычное взвешенное среднее.

Возьмем в качестве ядер ползучести ядро Абеля $K_0^i \cdot (t - \alpha)^{-\alpha_i}$, для каждой из двух фаз, α_i при $i = 1, 2$ могут отличаться, $0 < \alpha_i < 1$ ($i = 1, 2$).

Поскольку преобразование Лапласа от функции $\frac{t^q}{\Gamma(q+1)}$, $\Gamma(q+1)$ - гамма-функция Эйлера, равно: $\frac{1}{p^{q+1}}$, нетрудно получить, что в (8) оценки сверху и снизу будут равномерно по p ограничены на прямой $\operatorname{Re} p = s^*$. Последнее обстоятельство позволяет перейти к исходным переменным и получить следующую оценку:

$$\|u_\varepsilon(x, t) - u_0(x, t)\|_{L_2(0, L)} \leq C(T)\varepsilon, \quad t \in [0, T]. \quad (15)$$

Заметим, что величина ползучести композитного образца при постоянной нагрузке будет определяться простым взвешенным средним ядер ползучести. Положим $u_\varepsilon(x, p) - u_0(x, p) = F_\varepsilon(x, p)$. Была получена следующая оценка: $\|F_\varepsilon(x, p)\|_{L_2(0, 1)} \leq C\varepsilon \|\tilde{f}(x, p)\|_{L_2(0, 1)}$, где $C > 0$ не зависит от x и p . Пусть $\delta_\varepsilon(x, t)$ - прообраз Лапласа от функции $F_\varepsilon(x, p)$, тогда $\delta_\varepsilon(x, t) = \int_{l_{s^*}} e^{(s^*+is)t} F_\varepsilon(x, s^*+is) ds$, где l_{s^*} - это пунктирная линия, проходящая через точку s^* оси абсцисс (Рис. 2). Тогда мы получаем:

$$\begin{aligned} \|\delta_\varepsilon(x, t)\|_{L_2[(0, 1) \times (0, T)]}^2 &= \int_0^1 dx \int_0^T dt \left\{ e^{2s^*t} \int_{l_{s^*}} e^{ist} F_\varepsilon(x, s^*+is) ds \cdot \int_{l_{s^*}} e^{ist} F_\varepsilon(x, s^*+is) ds \right\} ds \leq \\ &\leq \int_0^1 dx \left(e^{2s^*T} \varepsilon^2 C^2 \|\tilde{f}(x, s^*+is)\|_{L_2[-\infty, \infty]}^2 \right) \leq e^{2s^*T} \varepsilon^2 C^2 \|\tilde{f}(x, s^*+is)\|_{L_2[(-\infty, \infty) \times (0, 1)]}^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Итак, получена оценка погрешности:

$$\|\delta_\varepsilon(x, t)\|_{L_2[(0, 1) \times (0, T)]} \leq \varepsilon C e^{s^*T} \|\tilde{f}(x, s^*+is)\|_{L_2[(-\infty, \infty) \times (0, 1)]}. \quad (17)$$

Пусть $f \equiv 1$ при $t > 0$. Выбирая s^* оптимальным образом и вычисляя соответствующие интегралы, легко получить следующую оценку:

$$\|\delta_\varepsilon(x, t)\|_{L_2[(0, 1) \times (0, T)]} \leq \varepsilon CT. \quad (18)$$

Выводы

Оценка (18) позволяет утверждать, что метод усреднения применим для рассматриваемой задачи на интервале времени, длина которого стремится к бесконечности, с одновременным увеличением количества слоев в образце и уменьшением толщины каждого слоя. Таким образом, если длина временного интервала увеличивается как квадратный корень из обратной величины длины ячейки периодичности (общей длины двух соседних слоев) ε , то для такого асимптотически большого интервала времени наша оценка даст точность метода усреднения порядка квадратного корня из ε . Полученный результат указывает на возможность эффективного применения метода усреднения для задач длительного нагружения композиционных материалов, состоящих из упруго-ползучих однородных фаз. Работа по изучению длительных нагрузок таких материалов необходима и важна, поскольку многие композиты в технике подвержены действию подобных нагрузок.

Литература

1. Георгиев С.В., Меретуков З.А., Соловьева А.И. К определению прочности бетона, обжатого композитными материалами, расположенными в поперечном направлении // Инженерный вестник Дона, 2021, №10. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n10y2021/7225
2. Кузнецова О.В., Лазарева Е.А., Тышлангян Ю.С. Композиционные разработки в технологии производства // Инженерный вестник Дона, 2013, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1628
3. Павлычева Е.А. Разработка полимерного композиционного диэлектрического материала на основе эпоксидиановой смолы // Инженерный вестник Дона, 2020, №8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2020/6586



4. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных сред. М.: МГУ, 1990. 311 С.
 5. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: МГУ, 1984. 336 с.
 6. Кристинен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 С.
 7. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: УРСС, 2003. 376 С.
 8. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. С. 97-104.
 9. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 С.
 10. Gavrikov A.A., Shamaev A.S. On the modeling of creep layered structures with nonlinear constitutive relations // Elsevier: IFAC Proceedings Volumes, 2018, V. 51. №2. pp.150-155.
 11. Bobyleva T.N., Shamaev A.S. Method of approximate calculation of the stress tensor in layered elastic-creeping environments // Elsevier: IFAC Proceedings Volumes, 2018, V. 51. №2. pp.138-143.
 12. Bobyleva T.N., Shamaev A.S. Effective characteristics of a layered tube consisting of elastic-creeping materials // IPICSE-2018, MATEC Web of Conf., 2018, V. 251. P. 04039
 13. Lukkassen D., Meidell A., Piatnitski A. L., Shamaev A. S. Twisting a thin periodically perforated elastic rod // Applicable Analysis, 2009, V. 88. №10. pp.1563-1577.
 14. Panasenko G. Asymptotic analysis of bar systems (I) // Russian Journal of Math. Physics, 1994, V. 2. №3. pp.325-352.
 15. Vedeneev V.V., Gavrikov A.A., Knyazkov D.Yu., Melnikov A.M., Shamaev A.S. On limits of applicability of the homogenization method to
-



modelling of layered creep media // Elsevier: IFAC Proceedings Volumes, 2018, V.51. №2. pp.144-149.

References

1. Georgiev S.V., Meretukov Z.A., Solov`eva A.I. Inzhenernyj vestnik Dona, 2021, №10. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n10y2021/7225
2. Kuzneczova O.V., Lazareva E.A., Ty`shlangyan Yu.S. Inzhenernyj vestnik Dona, 2013, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1628
3. Pavly`cheva E.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2020, №8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2020/6586
4. Oleynik O. A., Iosif`yan G. A., Shamaev A. S. Mathematical problems in elasticity and homogenization. North-Holland: Elsevier, 1992. 311 p.
5. Pobedrya B.E. Mexanika kompozicionny`x materialov. [Mechanics of composite materials]. Moskva: MГУ, 1984. 336 p.
6. Christensen R.M. Mechanics of composite materials. New York: Dover, 2005. 334 p.
7. Bardzokas D.I., Zobnin A.I. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskix processov v kompozicionny`x materialax periodicheskoy struktury`. [Mathematical modeling of physical processes in composite materials of periodic structure]. Moskva: YPCC, 2003. 376 p.
8. Rabotnov Yu.N. Elements of Hereditary Solid Mechanics. London: Central Books Ltd, 1980. 387 p.
9. Rabotnov Yu.N. Polzuchest` e`lementov konstrukcij. [Creep of Structural Elements]. Moskva: Nauka, 1966. 752 p.
10. Gavrikov A.A., Shamaev A.S. Elsevier: IFAC – PapersOnline, IFAC Proceedings Volumes. 2018, V. 51. №2. pp.150-155.
11. Bobyleva T.N., Shamaev A.S. Elsevier: IFAC – PapersOnline, IFAC Proceedings Volumes. 2018, V. 51. №2. pp.138-143.



12. Bobyleva T.N., Shamaev A.S. IPIECE-2018, MATEC Web of Conf. 2018, V. 251. P. 04039
13. Lukkassen D., Meidell A., Piatnitski A. L., Shamaev A. S. Applicable Analysis. 2009, V. 88. №10. p.p.1563-1577.
14. Panasenko G. Russian Journal of Math. Physics. 1994, V. 2. №3. p.p.325-352.
15. Vedenev V.V., Gavrikov A.A., Knyazkov D.Yu., Melnikov A.M., Shamaev A.S. Elsevier: IFAC – PapersOnline, IFAC Proceedings Volumes. 2018, V.51. №2. pp.144-149.