Инженерный вестник Дона, №3 (2018)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5219

К теории электромагнитных волн в градиентных структурах с киральной метасредой

И.П. Руденок[1], А.И. Киреева[2]

[1] *Волгоградский государственный технический университет,*
[2] *Волгоградский государственный медицинский университет.*

Аннотация: Выполнено исследование процесса распространения волн в киральной метасреде с градиентными диэлектрической, магнитной и магнитоэлектрическими проницаемостями. Рассмотрено условие существования в ней неклассических электромагнитных волн. Получены зависимости поперечных и продольных компонент вектора распространения от параметров градиентности пространственных профилей материальных характеристик искусственной среды.
Ключевые слова: киральная метасреда, плоские электромагнитные волны, градиентные материальные характеристики, нормированный волновой вектор.

Введение

Одним из перспективных и интенсивно развивающихся направлений оптоэлектроники и интегральной оптики в последнее время является изучение волноводных свойств метасред и композиционных структур на их основе, материальные характеристики и параметры которых изменяются в пространстве и во времени. Линейно поляризованная мода в таких искусственных средах испытывает вращение плоскости поляризации, фарадеевское вращение, гиротропию, бианизотропию, киральность, биизотропию и т.д. [1, 2]. Бурное развитие метаматериальных технологий стимулирует исследования новых градиентных киральных метасред и волновых явлений в них [3,4]. Очень часто материальные уравнения градиентных бианизотропных метаматериалов моделируются выражением вида [5]:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{\varepsilon}(x,y,z)\vec{E} + \vec{\alpha}(x,y,z)\vec{H}, \\ \vec{B} &= \vec{\mu}(x,y,z)\vec{H} + \vec{\beta}(x,y,z)\vec{E}, \end{aligned} \quad (1)$$

которое использовалось ранее для однородных структур.

При этом структура входящих в уравнение (1) тензоров определяется взаимностью и отсутствием или присутствием поглощения и т.д.

В настоящее время не возможно быть уверенным до конца, что материальные уравнения (1) являются истинной математической моделью метаматериалов. Эти высказывания основаны на том, что отсутствует строгое однозначное обоснование этих уравнений. Из-за этого существует несколько видов соотношений, считающихся материальными уравнениями композиционной среды, которые не являются полностью эквивалентными. До конца не ясен физический смысл магнитоэлектрических проницаемостей для большинства физико-математических моделей сложных сред, что определяет связь между ними и геометрическими характеристиками мета элементов или пространственной конфигурацией мета молекул, мета атомов. Материальные уравнения (1) не учитывают существенной периодичности расположения мета микроэлементов для описания пространственной дисперсии [6].

В рамках использования заданных материальных уравнений со скалярными диэлектрической, магнитной и магнитоэлектрических проницаемостей решён достаточно широкий круг электродинамических задач распространения волн в волноведущих структурах с простейшими искусственными заполнениями. Авторами были выяснены их основные электродинамические свойства. В частности, к ним можно отнести невозможность направления плоской электромагнитной волны с линейной поляризацией [7]. Здесь нормальными волнами являются гибридные моды, имеющие шесть компонент векторов $\vec{H}$ и $\vec{E}$ явление кросс-поляризации поля направляемой волны. Однако до сих пор небольшое внимание уделяется математическому моделированию волновых процессов в градиентных, бианизотропных, периодических композиционных структурах.

Волны дискретного спектра в градиентной искусственной среде

Изучим волновые свойства неклассических плоских электромагнитных волн. Запишем их электрический и магнитный векторы:

$$\vec{E} = \vec{E}_* \exp\left[j\left(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t\right)\right],$$
$$\vec{H} = \vec{H}_* \exp\left[j\left(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t\right)\right]. \qquad (2)$$

где $\vec{E}_*, \vec{H}_*$ – амплитуды электрического и магнитного векторов волны, $\vec{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$ – волновой вектор, $\vec{r}$ – радиус-вектор, ω – круговая частота волны, t – текущее время.

Материальные уравнения для метасреды имеют следующую форму:

$$\vec{D} = \varepsilon(x)\vec{E} + [\alpha(x) + j\beta(x)]\vec{H},$$
$$\vec{B} = \mu(x)\vec{H} + [\nu(x) - j\gamma(x)]\vec{E}. \qquad (3)$$

а $\varepsilon(x), \mu(x)$ – относительная градиентная диэлектрическая и магнитная проницаемости; $\alpha(x), \beta(x), \nu(x), \gamma(x)$ – составляющие магнитоэлектрических проницаемостей. Для определённости будем считать, что диэлектрическая и магнитная проницаемости искусственной среды распределены по закону вида [7, 8]:

$$\varepsilon\{\mu\} = f(\tau_0, \tau_1, \tau_2, x) = f_0 - f_1 \cdot \left[\frac{\tau_0 \cdot th\left(\dfrac{x}{\tau_0 \cdot \tau_2}\right)}{1 + \tau_0 \cdot \tau_1 \cdot th\left(\dfrac{x}{\tau_0 \cdot \tau_2}\right)}\right]^2. \qquad (4)$$

Здесь параметры τ_0, τ_1 удовлетворяют условию $0 \le \tau_0 \cdot \tau_1 < 1$. Тогда выражение (4) не имеет особенностей. Её схематичный график представлен на рисунке 1.

При этом:

$$f_2 = \varepsilon\{\mu\}(\infty) = f_0 - f_1\tau_0(1 + \tau_0 \cdot \tau_1)^{-2},$$
$$f_3 = \varepsilon\{\mu\}(-\infty) = f_0 - f_1\tau_0(1 - \tau_0 \cdot \tau_1)^{-2}.$$

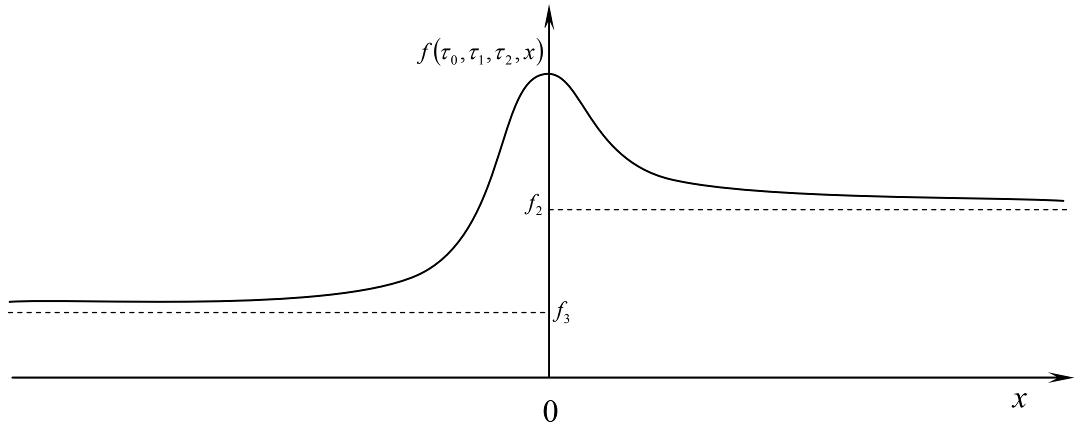

Рис. 1. Распределение диэлектрической и магнитной проницаемости градиентной композиционной среды.

Магнитоэлектрические проницаемости $\alpha(x), \beta(x), \nu(x), \gamma(x)$ распределены по обобщённым степенным законам[9]:

$$\alpha(q_0,q_2,q_4,x)=\alpha_*(0)(q_0-q_2x^2+q_4x^4), \quad (5)$$

$$\beta(q_0,q_{10},x)=\beta_*(0)(q_0-q_{10}x^{10}), \quad (6)$$

$$\nu(a_0,a_6,x)=\nu_*(0)(a_0-a_6x^6), \quad (7)$$

$$\gamma(b_0,b_2,x)=\gamma_*(0)(b_0-b_2x^2), \quad (8)$$

где $q_0,q_2,q_4,a_0,a_6,b_0,b_2$ – параметры градиентности пространственных профилей.

С учётом материальных уравнений (3) и производных по времени получаем:

$$\begin{aligned}&[\vec{\nabla},\vec{E}]=j\,l_0\left[\mu(x)\vec{H}+\alpha(x)\vec{E}+j\,\beta(x)\vec{E}\right],\\&[\vec{\nabla},\vec{H}]=j\,l_0\left[-\varepsilon(x)\vec{E}-\nu(x)\vec{H}+j\,\gamma(x)\vec{H}\right],\end{aligned} \quad (9)$$

где $l_0=\dfrac{\omega}{c}$. Для плоской волны (2) справедливы равенства:

$$\begin{aligned}&[\vec{\nabla},\vec{E}]=[j\vec{l},\vec{E}],\\&[\vec{\nabla},\vec{H}]=[j\vec{l},\vec{H}].\end{aligned} \quad (10)$$

С учётом (10) уравнения (9) можно представить:

$$\left[\vec{l},\vec{E}_*\right] = \mu(x)\vec{H}_* + \alpha(x)\vec{E}_* + j\,\beta(x)\vec{E}_*,$$
$$\left[\vec{l},\vec{H}_*\right] = -\varepsilon(x)\vec{E}_* - \nu(x)\vec{H}_* - j\,\gamma(x)\vec{H}_*,$$

(11)

а $\vec{l} = \dfrac{\vec{l}}{l_0}$. Первое уравнение из (11) умножим векторно слева на вектор $\vec{l}$ и получаем:

$$\left[\vec{l},\left[\vec{l},\vec{E}_*\right]\right] = \mu(x)\left[\vec{l},\vec{H}_*\right] + \alpha(x)\left[\vec{l},\vec{E}_*\right] + j\beta(x)\left[\vec{l},\vec{E}_*\right]. \qquad (12)$$

Подставим в уравнение (12) выражения (11) и после нескольких математических преобразований находим, что

$$\begin{aligned}\left[\vec{l},\left[\vec{l},\vec{E}_*\right]\right] = {} & \left[j\beta(x)\nu(x) - \mu(x)\varepsilon(x) - \nu(x)\alpha(x) - j\gamma(x)\alpha(x) + \gamma(x)\beta(x)\right]\vec{E}_* + \\ & + \left[\nu(x) + j\gamma(x) + \alpha(x) + j\beta(x)\right]\left[\vec{l},\vec{E}_*\right].\end{aligned} \qquad (13)$$

Дисперсионные уравнения

Для последующих преобразований представим волновой вектор через его проекции на координатные оси:

$$\vec{l} = l_x\vec{n}_x + l_y\vec{n}_y + l_z\vec{n}_z. \qquad (14)$$

Запишем уравнение (13) в координатной форме. Результатами такого разложения будут являться следующие покомпонентные равенства:

$$\begin{cases} -\left(l_y^2 + l_z^2 + T_0\right)E_{*x} + \left(l_y l_x + T_2 l_z\right)E_{*y} + \left(l_z l_x - T_2 l_y\right)E_{*z} = 0, \\ \left(l_x l_y - T_2^3 l_z\right)E_{*x} - \left(l_x^2 + l_z^2 + T_0\right)E_{*y} + \left(l_z l_y + T_2 l_x\right)E_{*z} = 0, \\ \left(l_z l_x + T_2 l_y\right)E_{*x} + \left(l_y l_z - T_2 l_x\right)E_{*y} - \left(l_x^2 + l_y^2 + T_0\right)E_{*z} = 0, \end{cases} \qquad (15)$$

здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} T_0 = {} & -\mu(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\varepsilon(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x) - \nu(a_0,a_6,x)\alpha(q_0,q_2,q_4,x) + \\ & + j\beta(g_0,g_{10},x)\nu(a_0,a_6,x) - j\gamma(b_0,b_2,x)\alpha(q_0,q_2,q_4,x) + \gamma(b_0,b_2,x)\beta(g_0,g_{10},x), \\ T_2 = {} & \nu(a_0,a_6,x) + j\gamma(b_0,b_2,x) + \alpha(q_0,q_2,q_4,x) + j\beta(g_0,g_{10},x). \end{aligned} \qquad (16)$$

Приведём систему уравнений к матричному виду:

$$L(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\vec{E}_* = 0, \qquad (17)$$

а

$$L(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)=\begin{bmatrix}\Phi_0(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x) & \Phi_1(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x) & \Phi_2(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\\ \Phi_3(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x) & \Phi_4(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x) & \Phi_5(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\\ \Phi_6(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x) & \Phi_7(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x) & \Phi_8(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\vec{E}_* = \begin{bmatrix} E_{*x}\\ E_{*y}\\ E_{*z}\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
&\Phi_0(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)=l_y^2+l_z^2+T_0(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x),\\
&\Phi_1(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)=l_y l_x+l_z T_2(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x),\\
&\Phi_2(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)=l_z l_x-l_y T_2(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x),\\
&\Phi_3(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)=l_x l_y-l_z T_2(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x),\\
&\Phi_4(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)=-l_x^2-l_z^2-T_0(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x),\\
&\Phi_5(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)=l_z l_y+l_x T_2(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x),\\
&\Phi_6(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)=l_z l_x+l_y T_2(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x),\\
&\Phi_7(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)=l_y l_z-l_x T_2(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x),\\
&\Phi_8(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)=-l_x^2-l_y^2-T_0(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x).
\end{aligned} \quad (19)$$

Так как ранг матрицы равен количеству алгебраических уравнений, то необходимо приравнивать к нулю её главный:

$$\det L(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)=0. \quad (20)$$

Вычисляя определитель, после некоторых математических преобразований получаем:

$$\begin{aligned}
&\Phi_0(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\cdot\Phi_4(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\cdot\Phi_8(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)-\\
&-\Phi_0(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\cdot\Phi_7(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\cdot\Phi_5(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)-\\
&-\Phi_1(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\cdot\Phi_3(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\cdot\Phi_8(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)+\\
&+\Phi_1(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\cdot\Phi_4(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\cdot\Phi_6(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)+\\
&+\Phi_2(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\cdot\Phi_3(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\cdot\Phi_7(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)-\\
&-\Phi_2(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\cdot\Phi_6(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)\cdot\Phi_4(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)=0.
\end{aligned} \quad (21)$$

Из структуры элементов главного определителя матрицы $L(\tau_0,\tau_1,\tau_2,x)$ видно, что продольная составляющая l_z нормированного волнового вектора $\vec{l}$ входит в равенство (21) в четвёртой степени. Это означает то, что как и для обычной киральной среды продольная компонента волнового вектора в градиентной метасреде будет иметь четыре значения. Делаем вывод о том, что в искусственной среде, как и в однородной, в общем случае могут распространяться четыре волны, свойства которых определяются параметрами градиентности материальных характеристик метасреды [10]. Аномальное распространение волн в такой среде, когда может быть больше или меньше двух встречных мод, порождает математические проблемы неопределённости или отсутствия решения (необычная комбинация знаков поперечных и продольной составляющей волнового вектора).

Представим условия существования плоских электромагнитных волн в некоторых частных случаях композиционной искусственной среды. Рассмотрим однородную изотропную киральную среду в СВЧ диапазоне на основе спиралей с правой закруткой. В материальных уравнениях (3) $\varepsilon = const,\ \mu = const, \alpha(x) = \nu(x) = 0, \beta(x) = \gamma(x) = \beta = const$. Пусть в разложении волнового вектора $\vec{l}$ проекция l_y равна нулю. Тогда в разложении (20) после некоторых математических преобразований получаем дисперсионное уравнение в следующей форме:

$$d_1 l_z^4 + d_2 l_z^2 + d_3 l_z^0 = 0, \tag{21}$$

а

$$\begin{aligned} &d_1 = \beta^2 - \varepsilon\mu, d_2 = 2\left(\beta^2 - \varepsilon\mu\right)\left(l_x^2 - 2\beta^2\right), \\ &d_2 = \left(\beta^2 - \varepsilon\mu\right)\left[\left(l_x^2 - 2\beta^2\right) - 4\beta^2 l_x^2\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Выражение (21) представляет собой биквадратичное алгебраическое уравнение, которое имеет четыре различных корня:

$$l_{z1}=\left[\left(\sqrt{\varepsilon\mu}+\beta\right)^2-l_x^2\right]^{\frac{1}{2}}, l_{z2}=\left[\left(\sqrt{\varepsilon\mu}-\beta\right)^2-l_x^2\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$l_{z3}=-\left[\left(\sqrt{\varepsilon\mu}+\beta\right)^2-l_x^2\right]^{\frac{1}{2}}, l_{z4}=-\left[\left(\sqrt{\varepsilon\mu}-\beta\right)^2-l_x^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

которые характеризуются продольными составляющими волнового вектора, отличаются только направлением распространения. Это касается и волн, для которых справедливы второе и четвёртое уравнения, причём во всех четырёх выражениях наблюдается явная зависимость от материальных параметров искусственной среды.

Литература

1. Бакеева И.В. Наноструктуры: основные понятия, классификация, способы получения. – 2-е изд. М.: МИТХТ им. М. К. Ломоносова, 2008. 68 с.

2. Иванов О.В. Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных слоистых структурах. Ульяновск: УлГТУ, 2010. 262 с.

3. Dmitry A. Yakovlev, Vladimir G. Chigrinov, Hoi-Sing Kwok. Modeling and Optimization of LCD Optical Performance. John Wiley & Sons, 2015. 584 p.

4. Rego G., Caldas P., Ivanov O.V., "Coupling to antisymmetric modes in long-period gratings", Livro das Actas da 16 Conferencia Nacional de Fisica, Portugal, Lisbon, Sept. 3 – 6, 2008, p. 212.

5. Руденок И.П., Киреева А.И., Филичева Т.В. Распространение волн в кристаллических структурах с искусственной композиционной средой // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2011, Т 14, №2. С. 10-15.

6. Руденок И.П., Агишева Н.Н., Руденок А.И. О некоторых краевых задачах теории базовых композиционных волноведущих структур // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2003, Т.6, №4. С.5-12.

7. Руденок И.П., Киреева А. И., Филичева Т.В. Поверхностные волны вдоль слоев градиентности в периодических композиционных структурах // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2012, Т15, №4. С. 41- 47.

8. Руденок И.П., Руденок А.И. К теории волн в открытых анизотропных нелинейных градиентных волноведущих структурах //Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2001, Т.4, №2. С. 10-15.

9. Киреева А.И., Руденок И.П., Поздняков А.П. К математической теории поверхностных волн в открытых композиционных нелинейных анизотропно-градиентных структурах // Инженерный вестник Дона, 2015, № 4. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_112_Kireeva.pdf_44b312aaf3.pdf

10. Киреева А.И., Руденок И.П. Математическое моделирование взаимодействия поверхностных волн в открытых анизотропно-градиентных волноводах // Инженерный вестник Дона, 2015, № 4. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_20_Kireeva.pdf_da760066f0.pdf

References

1. Bakeeva I.V. Nanostruktury: osnovnyeponjatija, klassifikacija, sposoby poluchenija [Nanostructures: basic concepts, classification, methods of preparation]. 2-e izd., M.: MITHT im. M. K. Lomonosova, 2008. 68 p.

2. Ivanov O.V. Rasprostranenie jelektromagnitnyh voln v anizotropnyh i bianizotropnyh strukturah [Distribution of electromagnetic waves in anisotropic and bianizotropic structures]. Ul'janovsk: UlGTU, 2010. 262 p.

3. Dmitry A. Yakovlev, Vladimir G. Chigrinov, Hoi-Sing Kwok. Modeling and Optimization of LCD Optical Performance. John Wiley & Sons, 2015. 584 p.

4. Rego G., Caldas P., Ivanov O.V., "Coupling to antisymmetric modes in long-period gratings", Livro das Actas da 16 Conferencia Nacional de Fisica, Portugal, Lisbon, Sept. 3 – 6, 2008, p. 212.

5. Rudenok I.P., Kireeva A.I., Filichjova T.V. Fizika volnovyh processov i radiotehnicheskie sistemy, 2011. V.14, № 2. pp. 10-15.

6. Rudenok I.P., Agisheva N.N., Rudenok A.I. Fizika volnovyh processov i radiotehnicheskie sistemy, 2003. V.6, № 4. pp. 5-12.

7. Rudenok I.P., Kireeva A.I., Filichjova T.V. Fizika volnovyh processov i radiotehnicheskie sistemy, 2012. V. 15, № 4. pp. 41-47.

8. Rudenok I.P., Rudenok A.I. Fizika volnovyh processov i radiotehnicheskie sistemy, 2001. V.4, № 2. pp. 10-15.

9. Kireeva A.I., Rudenok I.P., Pozdnjakov A.P. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, № 4. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_112_Kireeva.pdf_44b312aaf3.pdf

10. Kireeva A.I., Rudenok I.P. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, № 4. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_20_Kireeva.pdf_da760066f0.pdf