

Алгоритм смешанного метода для определения прогибов в деревянных балках при учёте длительного нагружения

В.Д. Раков, Б.А. Тухфатуллин, Л.Е. Путеева

Томский государственный архитектурно-строительный университет

Аннотация: В статье изложен алгоритм определения прогибов в деревянных балках прямоугольного поперечного сечения с учётом длительного нагружения. Алгоритм расчёта основан на предложенном Д.К. Арлениновым подходе задания модуля упругости древесины в зависимости от уровня расчётных напряжений в табличной форме. Для решения поставленной задачи используется конечный элемент смешанного метода с переменным по длине элемента и высоте поперечного сечения модулем упругости. Приведены примеры расчёта шарнирно опертых балок при различных условиях нагружения. Полученные численные результаты подтверждаются экспериментальными данными, приведёнными в работах других авторов.

Ключевые слова: конечный элемент смешанного метода, переменный модуль упругости, прогибы деревянных балок, длительное нагружение.

Введение

В настоящее время в мировой практике в качестве строительного материала широко используется древесина как экологичный и возобновляемый природный материал [1]. Для конструкций, выполненных из дерева, наряду с требованиями прочности и устойчивости, обеспечение условия жёсткости также является немаловажным.

Исследования [2, 3] посвящены разработке инженерной методики определения прогибов деревянных балок при длительном нагружении с учётом ползучести материала, опирающейся на данные экспериментов ряда авторов [4 – 7]. Предложенная методика заключается в определении прогибов деревянных балок с учётом того обстоятельства, что модуль упругости древесины является переменной величиной, зависящей от уровня расчётных напряжений, возникающих в конструкции при длительном нагружении. Закон изменения модуля упругости в зависимости от уровня напряжений по данным профессора Д.К. Арленинова [3] представлен в табл. 1.

Таблица № 1

Значение модуля упругости
в зависимости от уровня нормальных напряжений

σ , МПа	До 5	6	7	8	9	10	11	12	Свыше 13
E , МПа	10000	9200	8300	7400	6500	5600	5000	4400	3900

В предложенной методике [3] конструкция разбивается на ряд участков с постоянным модулем упругости, принимаемым в соответствии с данными табл. 1, по максимальному в пределах участка напряжению. Таким образом, результаты расчёта будут напрямую зависеть от количества назначенных участков постоянной жёсткости. Следует отметить, что предложенная инженерная методика не учитывает влияния изменения уровня напряжений по высоте сечения на величину модуля упругости; используются данные только о фибровых напряжениях. На наш взгляд это объясняется нацеленностью методики [3] на применение программных комплексов SCAD, ЛИРА САПР и др., в которых возможности задания переменного по высоте сечения модуля упругости в стержневой системе ограничены.

В предыдущих исследованиях [8, 9] был предложен конечный элемент (КЭ) смешанного метода с переменным по длине модулем упругости, закон изменения которого задан в явном виде или таблично. Для вычисления элементов матрицы откликов [10], связывающей между собой реакции в отброшенных связях с перемещениями в добавленных связях, используется процедура численного интегрирования. Модификация алгоритма, предложенная в [11], позволяет вычислять жесткостные характеристики сечения в соответствии с эпюрой нормальных напряжений.

Цель исследования – разработка программно ориентированного алгоритма расчёта прогибов деревянных балок, находящихся в условиях длительного нагружения.

Объект исследования – деревянная балка прямоугольного поперечного сечения, находящаяся в условиях одного нагружения; модуль упругости материала меняется как по длине, так и по высоте балки в зависимости от уровня расчётных напряжений.

Материалы и методы

Для вычисления модуля упругости с учётом данных табл. 1 необходимо вычислять величины нормальных напряжений как по длине КЭ, так и по высоте поперечного сечения. В связи с этим предлагается следующий двухэтапный алгоритм. Каждый КЭ разбивается по длине на n_x участков (рис. 1, а), а поперечное сечение в пределах участка разбивается по высоте на n_y слоёв (рис. 1, б).

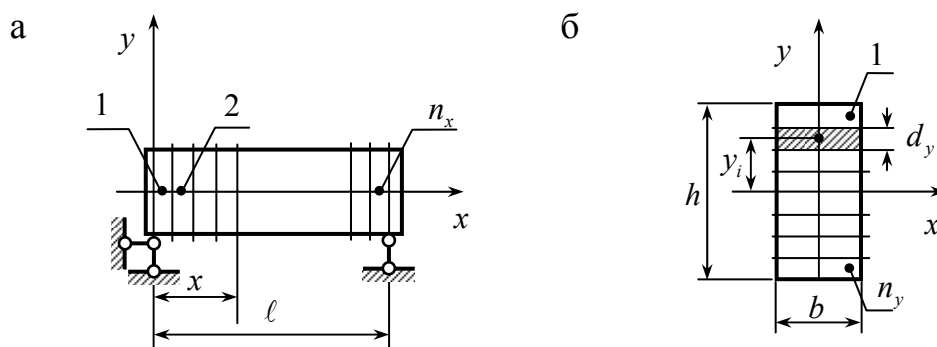


Рис. 1. – Схемы разбиения КЭ: а) по длине;
б) по высоте сечения

Обозначим найденные на первом этапе при заданном постоянном модуле упругости изгибающие моменты на участке через $M(x)$. Вычислим нормальные напряжения $\sigma(x, y_i)$ в сечении с координатой x от начала элемента в уровне слоя, находящегося на расстоянии y_i от нейтральной оси, по формуле

$$\sigma(x, y_i) = \frac{M(x)}{J_z} y_i. \quad (1)$$

В формуле (1) усилие $M(x)$ принимается без учёта знака. По найденным напряжениям определяется модуль упругости $E(y)$ для очередного слоя в соответствии с данными табл. 1. Полученные значения $E(y)$ подставляются в формулы для вычисления продольной $E(x)A$ и изгибной $E(x)J_z$ жёсткостей в сечении с координатой x :

$$E(x)A = \sum_{i=1}^{n_y} E(y)bdy, \quad (2)$$

$$E(x)J_z = \sum_{i=1}^{n_y} E(y) \left[\frac{b(dy)^3}{12} + bdy \cdot y_i^2 \right], \quad (3)$$

где b – ширина поперечного сечения; h – высота поперечного сечения; $dy = \frac{h}{n_y}$ – высота слоя (рис. 1, б). Результаты вычислений жёсткостей $E(x)A$ и $E(x)J_z$ по формулам (2), (3) используются для формирования матрицы откликов и вектора грузовых коэффициентов и расчёта системы на втором этапе. Осевую жёсткость $E(x)A$ требуется вычислять из-за особенностей алгоритма смешанного метода [8, 9].

Результаты и обсуждение

Пример № 1. Рассматривается шарнирно опертая балка [4] пролётом $\ell = 6$ м прямоугольного поперечного сечения с шириной $b = 12$ см и высотой $h = 33$ см, загруженная равномерно распределённой нагрузкой $q = 4,8$ кН/м (рис. 2, а). Геометрические характеристики сечения (момент инерции J_z и момент сопротивления W_z) определены по формулам:

$$J_z = \frac{12 \cdot 33^3}{12} = 35937 \text{ см}^4; \quad W_z = \frac{12 \cdot 33^2}{6} = 2178 \text{ см}^3.$$

Изгибающий момент $M_{z, \max}$ и нормальные напряжения σ_{\max} составят:

$$M_{z, \max} = \frac{4,8 \cdot 6^2}{8} = 21,6 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \sigma_{\max} = \frac{21,6 \cdot 10^3}{2178 \cdot 10^{-6}} = 9,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 9,9 \text{ МПа}.$$

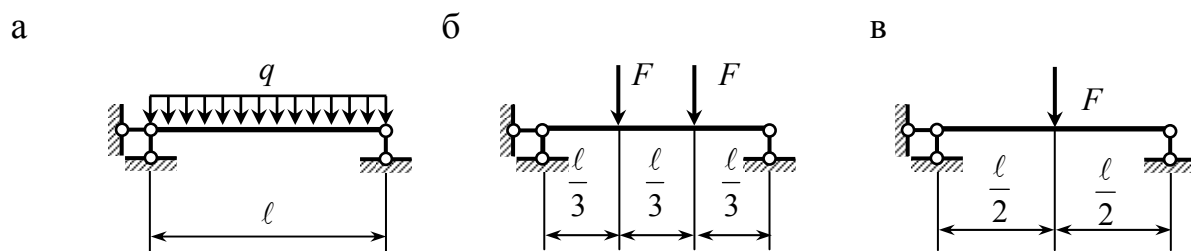


Рис. 2. – Расчётные схемы: а) пример № 1;

б) примеры № 2, 3; в) пример № 4

По результатам испытания двух балок в [4] установлены величины упругого $f_0^{(э)}$ и длительного $f_t^{(э)}$ прогибов (время испытания $t = 367$ суток):

$f_{0,1}^{(э)} = 23,0$ мм; $f_{0,2}^{(э)} = 22,5$ мм; $f_{t,1}^{(э)} = 30,2$ мм; $f_{t,2}^{(э)} = 28,8$ мм. Результаты вычисления

прогибов по предложенному алгоритму смешанного метода составили:

$f_0^{(МКЭ)} = 22,3$ мм; $f_t^{(МКЭ)} = 26,67$ мм.

Пример № 2. Однопролётная шарнирно опертая балка [3, 12] прямоугольного поперечного сечения загружена двумя сосредоточенными силами F , приложенными в третях пролёта (рис. 2, б). Исходные данные для расчёта: $l = 2,9$ м; $b = 10$ см; $h = 20,3$ см; $F = 8,82$ кН. Вычисленные величины:

$J_z = 6971$ см⁴; $W_z = 687$ см³; $M_{z,max} = 8,53$ кН·м; $\sigma_{max} = 12,4$ МПа. Эксперимент

проводился в течение 8 месяцев; прогибы в середине пролёта составили:

$f_0^{(э)} = 11,3$ мм; $f_t^{(э)} = 17,5$ мм. По предложенному алгоритму вычислены прогибы:

$f_0^{(МКЭ)} = 10,8$ мм; $f_t^{(МКЭ)} = 15,9$ мм.

Пример № 3. Для той же схемы балки, что и в примере № 2 приняты следующие исходные данные для расчёта: $l = 1,46$ м; $b = 10,0$ см; $h = 2,7$ см; $F = 0,317$ кН [6]. Результаты расчёта: $J_z = 16,4$ см⁴; $W_z = 12,15$ см³;

$M_{z,max} = 0,158$ кН·м; $\sigma_{max} = 13$ МПа. Время проведения эксперимента – 6 месяцев;

прогибы в середине пролёта составили: $f_0^{(э)} = 15,6$ мм; $f_t^{(э)} = 32,0$ мм. Прогибы,

вычисленные по предложенному алгоритму:

$$f_0^{(\text{МКЭ})} = 21,2 \text{ мм}; f_t^{(\text{МКЭ})} = 31,9 \text{ мм}.$$

Пример № 4. Однопролётная шарнирно опертая балка [5] прямоугольного поперечного сечения $b = 9,4$ см и высотой $h = 1,91$ см загружена в середине пролёта $\ell = 1,5$ м сосредоточенной силой $F = 0,196$ кН (рис. 2, в). Кратковременный прогиб составил: $f_0^{(3)} = 26,1$ мм, а после 8 месяцев испытаний увеличился до $f_t^{(3)} = 33,4$ мм. Результаты, полученные с использованием смешанного метода: $f_0^{(\text{МКЭ})} = 24,9$ мм; $f_t^{(\text{МКЭ})} = 32,4$ мм.

На рис. 3 представлены графики изменения вычисленной величины прогиба в зависимости от принятого по высоте сечения количества слоёв. Для примеров № 1 – № 4 количество слоёв принималось равным 2, 4, 6, 8, 10 и 12. Как следует из приведенных графиков, достаточным будет назначать число слоёв от 10 до 12.

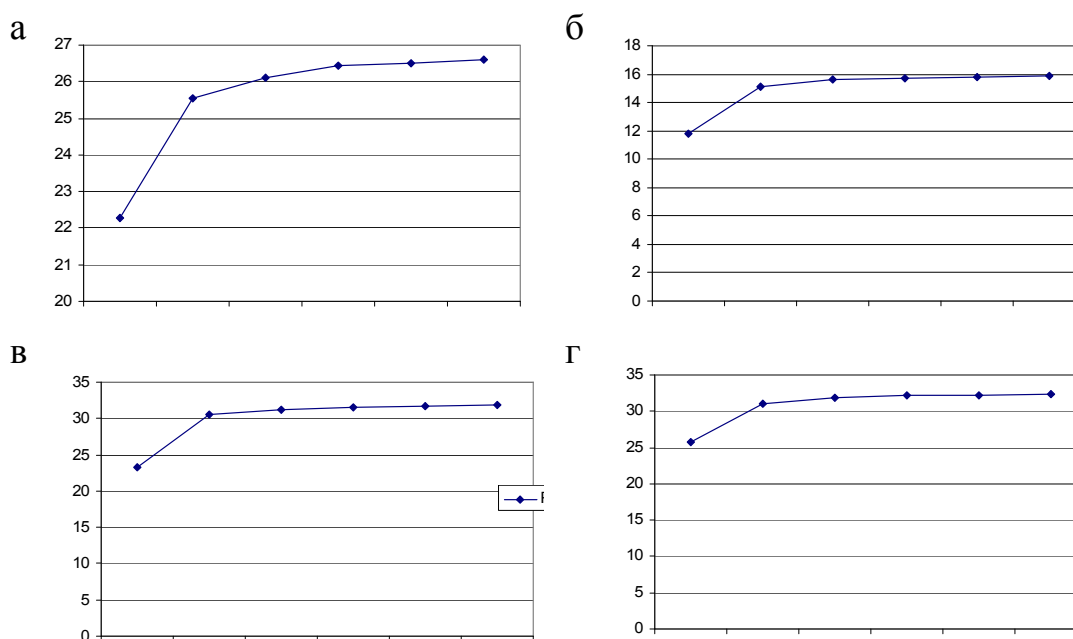


Рис. 3. – Результаты вычисления прогибов в балках в зависимости от назначенного по высоте сечения числа слоёв: а) пример № 1; б) пример № 2, в) пример № 3; г) пример № 4

Сводка результатов и сравнение с инженерной методикой [3, 12] приведена в табл. 2.

Таблица № 2

Результаты вычисления прогибов в середине пролётов балок

Номер примера	Данные эксперимента		Инженерная методика [3, 12]	Смешанный метод	
	$f_0^{(э)}$, мм	$f_t^{(э)}$, мм	$f_t^{(т)}$, мм	$f_0^{(МКЭ)}$, мм	$f_t^{(МКЭ)}$, мм
1	23	30,2	31,5 (-4,3 %)	22,3 (3,04 %)	26,7 (11,6 %)
	22,5	28,8	31,5 (-9,4 %)	22,3 (0,89 %)	26,7 (7,3 %)
2	11,3	17,5	19,2 (-9,7 %)	10,8 (4,4 %)	15,9 (9,1 %)
3	15,6	32,0	–	21,2 (-35,9 %)	31,9 (0,31 %)
4	26,1	33,4	–	24,9 (4,6 %)	32,4 (3,3 %)

Заключение

В статье предложен алгоритм вычисления прогибов в деревянных балках постоянного по длине поперечного сечения, работающих в условиях длительного нагружения. Алгоритм использует КЭ смешанного метода с переменным по длине модулем упругости. Жесткостные характеристики поперечных сечений уточняются в ходе расчёта по двухэтапному алгоритму. Результаты сравнения с экспериментальными данными других авторов свидетельствуют о корректной работе предложенного алгоритма; расхождение численных результатов с результатами эксперимента находится в диапазоне от 0,31 % до 11,6 %. Данный алгоритм также может быть использован для уточнения прогибов и внутренних усилий в плоских статически неопределимых стержневых системах, модуль упругости которых меняется в зависимости от действующих напряжений.

Работа выполнена при поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ (номер проекта 7.8899.2017/8.9).

Литература

1. Christoforo A.L. Numerical evaluation of the modulus of longitudinal elasticity in structural round timber elements of the Eucalyptus genus / Christoforo A.L. [and others]. // Eng. Agric. Vol. 31. № 5. Jaboticabal Sept./Oct., 2011. pp. 110.
 2. Арленинов Д.К., Арленинов П.Д. Переменный модуль упругости древесины // Вестник МГСУ, 2011. № 1. С. 150–152.
 3. Арленинов Д.К. Инженерный метод учёта ползучести древесины при определении прогибов // Вестник МГСУ, 2011. № 1. С. 147–149.
 4. Рощина С.И. Прочность и деформативность клеёных армированных деревянных конструкций при длительном действии нагрузки: автореферат дис. ...докт. техн. наук. Москва, 2009. 38 с.
 5. Арленинов Д.К., Линьков Н.В. Предложения по методике испытаний для оценки ползучести древесины // Известия КГАСУ, 2017. № 4 (42). С. 136–141.
 6. Арленинов Д.К., Беккер Д.А. Влияние уровня напряжений на ползучесть древесины при изгибе // Известия вузов. Лесной журнал, 2015. № 6. С. 128–137.
 7. Фурсов В.В., Пурязданхах М., Бидаков А.Н. Сравнительный анализ результатов теоретических и экспериментальных исследований натурной арки из клеёной древесины // Инженерный вестник Дона, 2014. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2014/2395
 8. Тухфатуллин Б.А., Путеева Л.Е., Раков В.Д. Разработка и апробация конечного элемента смешанного метода для расчёта стержневых систем с элементами переменной жёсткости // Инвестиции, строительство, недвижимостъ как материальный базис модернизации и инновационного развития экономики: материалы VIII Международной научно-практической конференции, 13–15 марта 2018 г.: в 2 ч. Ч. 1. Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2018. С. 456–466.
-



9. Тухфатуллин Б.А., Путеева Л.Е., Красина Ф.А. Расчёт плоских стержневых систем с переменным по длине модулем упругости методом конечных элементов в форме смешанного метода // Инженерный вестник Дона, 2018. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5111.
10. Ignatyev A.V., Ignatyev V.A., Onischenko E.V. Analysis of Systems with Unilateral Constraints through the Finite Element Method in the Form of a Classical Mixed Method // Procedia Engineering. Vol. 150. 2016. pp. 1754–1759.
11. Тухфатуллин Б.А., Путеева Л.Е., Раков В.Д., Подшивалов И.И. Расчёт деревянной рамы с использованием конечного элемента смешанного метода // Информационно-вычислительные технологии и их приложения: сборник статей XXII Международной научно-технической конференции, 27–28 августа 2018 г. / МНИЦ ПГАУ. Пенза: РИО ПГАУ, 2018. С. 109–113.
12. Арленинов Д.К. Расчётная оценка прогибов деревянных балок при длительной нагрузке // ПГС, 2012. № 11. С. 40–41.

References

1. Christoforo A.L. Eng. Agric. Vol. 31. № 5. Jaboticabal Sept. Oct. 2011. pp. 110.
 2. Arleninov D.K., Arleninov P.D. Vestnik MGSU, 2011. № 1. pp. 150–152.
 3. Arleninov D.K. Vestnik MGSU, 2011. № 1. pp. 147–149.
 4. Roshhina S.I. Prochnost' i deformativnost' klejonyh armirovannyh derevjannyh konstrukcij pri dlitel'nom dejstvii nagruzki [Durability and deformability of glued reinforced wooden structures under prolonged load action]: avtoreferat dis. ...dokt. tehn. nauk. Moskva, 2009. 38 p.
 5. Arleninov D.K., Lin'kov N.V. Izvestija KGASU, 2017. № 4 (42). pp. 136–141.
 6. Arleninov D.K., Bekker D.A. Izvestija vuzov. Lesnoj zhurnal, 2014. №6, pp. 1–7.
 7. Fursov V.V., Purjazdanhah M., Bidakov A.N. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2014. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2014/2395
-



8. Tukhfatullin B.A., Puteeva L.E., Rakov V.D. Investicii, stroitel'stvo, nedvizhimost' kak material'nyj bazis modernizacii i innovacionnogo razvitija jekonomiki: materialy VIII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii, 13–15 marta 2018 g.: v 2 ch. Ch. 1. Tomsk: Izd-vo Tom. gos. arhit.-stroit. un-ta, 2018. pp. 456–466.
9. Tukhfatullin B.A., Puteeva L.E., Krasina F.A. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2018, № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5111.
10. Ignatyev A.V., Ignatyev V.A., Onischenko E.V. Procedia Engineering. Vol. 150. 2016. pp. 1754–1759.
11. Tukhfatullin B.A., Puteeva L.E., Rakov V.D., Podshivalov I.I. Informacionno-vychislitel'nye tehnologii i ih prilozhenija: sbornik statej XXII Mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoi konferencii, 27–28 avgusta 2018 g. MNIC PGAU. Penza: RIO PGAU, 2018. pp. 109–113.
12. Arleninov D.K. PGS, 2012. № 11. pp. 40–41.