

Новый тип безвихревых течений гелия II во вращающемся цилиндре

И.Н. Мощенко¹, В.К. Яценко¹, А.Н. Ярошенко²

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Донской государственной университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: В рамках двухжидкостной теории Ландау исследованы течения в гелии II внутри вращающегося цилиндра. Особое внимание уделено анализу возбуждения центробежными силами противотоковых (по сверхтекучей и нормальной составляющим) течений. В приближении несжимаемой жидкости получено аналитическое решение уравнений движения, безвихревое по обоим компонентам. Тангенциальные скорости для него такие же, как у вращающегося твердого тела, причем нормальная и сверхтекучая составляющие движутся в противоположных направлениях, с различными угловыми скоростями. Возникающая при этом завихренность компенсируется закрученностью противотоковых радиальных течений. Решение не обладает осевой симметрией и имеет тангенциальный разрыв вдоль радиуса. Несмотря на его неустойчивость, оно представляет определенный интерес. Во-первых, оно может быть подправлено стабилизирующими деформациями. Кроме того, оно показывает пути потери устойчивости высокосимметричных состояний. В частности, по нашим представлениям, такого типа возмущения являются промежуточными, переходными, от течения Ландау (сверхтекучая составляющая покоится) до вращения Фейнмана (в сверхтекучей части формируется система вихрей).

Ключевые слова: гелий II, безвихревое вращение, противотоковые течения, компенсация завихренности, низкосимметричное состояние, тангенциальный разрыв, неустойчивость.

В наших предыдущих работах для некоторых типов вращательного движения в гелии II показано, что центробежные силы могут индуцировать противотоковые (по сверхтекучей и нормальной составляющим) течения [1]. Условия этой индукции – разная величина полей центробежных сил для нормального и сверхтекучего компонентов. В настоящей статье исследуется устойчивость гелия, движущегося внутри вращающегося цилиндра, относительно таких возмущений. Отметим, что конвективные противотоковые течения, вызываемые температурными градиентами, играют большую роль в формировании свойств гелия II [2,3]. По аналогии можно предположить, что такого же типа течения, возбуждаемых в поле центробежных сил, также важны. Все это подчеркивает актуальность и значимость работы, представленной в настоящей статье.

Исследование противотоковых течений, возбуждаемых центробежными силами важно и в практическом плане. Сравнительно недавно харьковскими исследователями (Рыбалко А.С.) в гелии II был выявлен эффект динамической поляризации. Он наблюдался для двух относительно различных условий. При тепловом возбуждении второго звука в резонаторе [4], и во время колебаний торсионного осциллятора, заполненного гелием частично (пленочный режим) или полностью [5]. Причем в первом случае поляризация была ориентирована вдоль колебаний жидкости и носила переменный характер, а во втором – поперек движения нормальной составляющей и была однонаправлено модулирована. Вполне возможно, что во втором эксперименте центробежные силы вызывали противотоковые радиальные течения (такие как во втором звуке). Они, в свою очередь, за счет механокалорического эффекта приводят к колебаниям разности температур между центром и периферией. Таким образом, в конечном итоге в обоих экспериментах реально были одинаковые условия возбуждения динамической поляризации.

В настоящей работе такие противотоковые колебания мы рассматривать не будем, ограничимся более простым, стационарным случаем. Анализом движения гелия II внутри вращающегося цилиндра. Исследования проводились нами в гидродинамическом пределе, в рамках двухжидкостной теории Ландау [2,3]. При этом мы предположили, что задача двумерная, нет зависимости от координаты вдоль оси вращения. Также мы не учитывали сжимаемость жидкости. Фактически это означает, что мы рассматриваем ситуацию, когда характерные размеры задачи больше длин волн первого и второго звука.

В приближении несжимаемой жидкости уравнения движения для нормальной и сверхтекучей составляющих распадаются. Каждая из них характеризуется своим набором переменных давления, плотности и скорости



($p_{s,n}$, $\rho_{s,n}$, $\mathbf{v}_{s,n}$, индексом s обозначены величины, относящиеся к сверхтекучей составляющей, n – к нормальной, здесь и далее жирным шрифтом отмечены векторные величины). При этом полное давление, плотность массы и плотность импульса в жидкости представляют соответствующие суммы ($p = p_s + p_n$, $\rho = \rho_s + \rho_n$, $\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n$).

Нормальная часть гелия II описывается как вязкая жидкость, уравнениями Навье - Стокса [2,6-8].

$$\frac{\partial v_{nr}}{\partial t} + v_{nr} \frac{\partial}{\partial r} v_{nr} - \frac{v_{n\varphi}^2}{r} = -\frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p_n}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v_{nr} \right) - \frac{v_{nr}}{r^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_{n\varphi}}{\partial t} + v_{nr} \left(\frac{\partial}{\partial r} v_{n\varphi} + \frac{v_{n\varphi}}{r} \right) = -\frac{1}{\rho_n r} \frac{\partial p_n}{\partial \varphi} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v_{n\varphi} \right) - \frac{v_{n\varphi}}{r^2} \right), \quad (2)$$

здесь ν – динамическая вязкость. Уравнения приведены сразу в двумерном виде, в полярной системе координат (r , φ).

Граничные условия для них задаются линейной скоростью вращения цилиндра.

$$v_{n\varphi}|_R = \Omega R, \quad (3)$$

где Ω – угловая скорость цилиндра, R – его радиус.

Одно из возможных решений, удовлетворяющих этим условиям - вращения жидкости как единого целого.

$$v_{n\varphi} = \Omega r, \quad (4)$$

$$v_{nr} = 0, \quad (5)$$

$$p_n = p_{n0} + \frac{\rho_n \Omega^2 r^2}{2}, \quad (6)$$

где p_{n0} – постоянная

Полученные решения (3-6) описывают течение вокруг вращающегося цилиндра в гелии при температурах выше λ точки. Ниже точки фазового перехода, в гелии возникают сверхтекучие свойства и появляются две составляющие. В принципе, эти решения теперь удовлетворяют уравнениям движения по-прежнему, для вязкого компонента, но здесь могут

существовать и другие решения. В отличие от обычной жидкости, в гелии II перпендикулярная к границе цилиндра составляющая скорости не обязательно равна нулю. Здесь должен исчезать только суммарный нормальный поток масс. И могут существовать другие решения, отличные от решений описывающих обычную жидкость.

Движение сверхтекучей составляющей описывается уравнениями Эйлера для идеальной жидкости (получаются из (1-3) занулением вязких слагаемых). Оно также должно быть потенциально.

$$\frac{\partial v_{sr}}{\partial t} + v_{sr} \frac{\partial}{\partial r} v_{sr} - \frac{v_{s\varphi}^2}{r} = -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial r}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_{s\varphi}}{\partial t} + v_{sr} \left(\frac{\partial}{\partial r} v_{s\varphi} + \frac{v_{s\varphi}}{r} \right) = -\frac{1}{\rho_s r} \frac{\partial p_s}{\partial \varphi}. \quad (8)$$

Сверхтекучая составляющая стенками цилиндра не увлекается и для нее возможно тривиальное решение – она покоится

$$v_{s\varphi} = 0, \quad (9)$$

$$v_{sr} = 0, \quad (10)$$

$$p_s = p_{s0}. \quad (11)$$

Ландау в свое время предполагал, что именно набор (4-6, 9-11) описывает течение гелия II внутри цилиндра. Однако эксперименты Андроникашвили (а потом и других исследователей) показали, что это не так [9,10]. Вся жидкость вращается как единое целое. Адекватное теоретическое объяснение этому факту предложил через четыре года Фейнман. Он показал, что при вращении цилиндра в гелии II развивается система квантовых вихрей, совокупно имитирующих вращение сверхтекучей части как единого целого [3]. Следует отметить, что все же вращение гелия II не совсем такое, как в обычной жидкости. Мениск в центре не параболический, а конусообразный, с увеличением скорости появляются и другие отличия. Но подробно на этом останавливаться не будем. Цель настоящей работы – найти другие решения уравнений движения гелия II во вращающемся цилиндре. Пусть даже

неустойчивые, но они могут пролить свет на вопрос о развитии неустойчивости для решения Ландау и путей его перехода в решение Фейнмана.

Предположим, что тангенциальная скорость движения сверхтекучей составляющей такая же, как у жидкости, вращающейся как единое целое.

$$v_{s\varphi} = \Omega_1 r, \quad (12)$$

здесь угловая скорость Ω_1 не обязательно должна совпадать со скоростью вращения цилиндра. Такое течение само по себе вихревое и не может соответствовать сверхтекучему компоненту. В двумерном случае ротор имеет только Z составляющую

$$(\text{rot} \vec{v}_s)_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_{s\varphi})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_{sr}}{\partial \varphi}. \quad (13)$$

Если мы возьмем радиальную скорость также в вихревом виде

$$v_{sr} = 2\Omega_1 r\varphi, \quad (14)$$

то закрученность такого потока скомпенсирует завихренность тангенциального движения, и все течение будет потенциально. Таким образом, решение (12, 14) может описывать движение сверхтекучей составляющей. Подставим его в (7, 8) и решив эти уравнения, найдем давление

$$p_s = p_{s0} - 2\rho_s \Omega_1^2 r^2 \varphi^2 + \frac{\rho_s \Omega_1^2 r^2}{2}, \quad (15)$$

Хотя в рассматриваемом приближении течения нормальной и сверхтекучей части описываются отдельными уравнениями (1, 2 и 7, 8), но решения этих двух наборов объединяются уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{j}) = 0, \quad (16)$$

в приближении несжимаемой жидкости

$$\text{div}(\mathbf{j}) = 0. \quad (17)$$

Через которое связаны радиальные компоненты скорости сверхтекучей и нормальной составляющей.

$$v_{nr} = -\frac{\rho_s}{\rho_n} v_{sr} = -\frac{\rho_s}{\rho_n} 2\Omega_1 r \varphi, \quad (18)$$

Для нормальной составляющей скорости в качестве решения возьмем (18 и 4). Подставим их в (1, 2). Получившиеся уравнения имеют решение для давления только в том случае, если угловые скорости связаны соотношением

$$\Omega_1 = -\frac{\rho_n}{\rho_s} \Omega, \quad (19)$$

при этом давление задается в следующем виде

$$p_n = p_{n0} - 2\rho_n \Omega^2 r^2 \varphi^2 + \frac{\rho_n \Omega^2 r^2}{2}. \quad (20)$$

Полученные соотношения (12,14,15) и (4,18,20,19) описывают найденное нами новое решение уравнений движения гелия II во вращающемся цилиндре. Эти соотношения разбросаны по статье в соответствии с логикой их получения. Для лучшего понимания полученного результата еще раз повторим их, собрав вместе (нумерацию оставим прежнюю).

Для сверхтекучей части мы получили

$$v_{s\varphi} = \Omega_1 r, \quad (12)$$

$$v_{sr} = 2\Omega_1 r \varphi, \quad (14)$$

$$p_s = p_{s0} - 2\rho_s \Omega_1^2 r^2 \varphi^2 + \frac{\rho_s \Omega_1^2 r^2}{2}. \quad (15)$$

Для нормальной составляющей уравнения по форме точно такие же

$$v_{n\varphi} = \Omega r, \quad (4)$$

$$v_{nr} = 2\Omega r \varphi, \quad (18)$$

$$p_n = p_{n0} - 2\rho_n \Omega^2 r^2 \varphi^2 + \frac{\rho_n \Omega^2 r^2}{2}. \quad (20)$$

Единственная разница в угловых скоростях вращения, которые противоположны, и обратно пропорциональны плотностям массы.

$$\Omega_1 = -\frac{\rho_n}{\rho_s} \Omega. \quad (19)$$

Это решение описывает течение, в котором с одной стороны тангенциальная скорость обоих компонент такая же, как при вращении твердого тела, но с

другой стороны движение безвихревое. Здесь завихренность тангенциальных потоков компенсируется радиальными противотоковыми движениями. Полученное решение несимметрично по азимутальному направлению и содержит тангенциальный разрыв вдоль радиуса. Как известно, такие разрывы неустойчивы. Но для нормальной вязкой жидкости оно может быть легко подправлено до устойчивого введением переходного пограничного слоя. Можно ли так сделать для обоих компонент сверхтекучей жидкости одновременно неизвестно, этот вопрос требует отдельного рассмотрения. Представляет также интерес роль теоретически выявленного нами течения в формировании общей картины вращений внутри цилиндра.

По нашим представлениям такого типа возмущения являются промежуточными, переходными от течения Ландау (нормальная составляющая вращается как твердое тело, сверхтекучая покоится) до вращения Фейнмана. Если цилиндр покоился, то при начале вращения он будет увлекать за собой нормальную часть. За счет центробежных сил в ней разовьются несимметричные противотоковые возмущения. Для сверхтекучей составляющей граница разрыва будет неустойчива, и при размытии она будет генерировать квантовые вихри. А дальше все по Фейнману, увлечение этих вихрей нормальным компонентом и формирование вращения сверхтекучей части. Все это говорит об актуальности и важности продолжения исследований в этом направлении.

Литература

1. Мощенко И.Н., Яценко В.К., Бугаян И.Ф., Пирогов Е.В. Противотоковые течения во вращающемся гелии II. Инженерный вестник Дона, 2018, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2018/5151.



2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Т. VI. Гидродинамика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 736 с.
3. Халатников И.М. Теория сверхтекучести. М.: Наука, 1971. 220 с.
4. Рыбалко А.С., Наблюдение электрической индукции, обусловленной волной второго звука в He II. Физика низких температур, 2004, т. 30, № 12, с. 1321–1325.
5. Рыбалко А.С., Рубец С.П. Наблюдение механоэлектрического эффекта в He II. Физика низких температур, 2005, т. 31, № 7, с. 820–825.
6. Joseph D.D. Stability of fluid motions I. Vol. 27. Springer Science & Business Media, 2013. 282 p.
7. Joseph D.D. Stability of fluid motions II. Springer Tracts in Natural Philosophy Vol. 28. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1976. 276 p.
8. Чистяков А.Е., Фоменко Н.А. Применение адаптивного модифицированного попеременно–треугольного итерационного метода для численной реализации двумерной математической модели движения водной среды. Инженерный вестник Дона, 2012, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/794.
9. Андроникашвили Э.Л. Воспоминания о жидком гелии. Тбилиси: Ганатлеба. 1980. 336 с.
10. Андроникашвили З.Л., Зиновьева К.Н., Мамаладзе Ю.Г., Питаевский Л.П. Свойства квантовой жидкости. В сб. Механика в СССР за 50 лет. Том 2. Механика жидкости и газа. М: Наука. 1970. С. 649-707.

References

1. Moschenko I.N., Yatsenko V.K., Bugayan I.F., Pirogov E.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2018, № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/5151.
-



2. Landau L.D., Lifshicz E.M. Teoreticheskaya fizika: V. VI. Gidrodinamika [Theoretical physics: Vol. VI. Hydrodynamics]. M.: Fizmatlit. 2001. 736 p.
3. Xalatnikov I.M. Teoriya sverxtekuchesti [The theory of superfluidity]. M.: Nauka, 1971. 220 p.
4. Ry`balko A.S. Fizika nizkix temperatur, 2004. V. 30, № 12. P. 1321–1325.
5. Ry`balko A.S., Rubecz S.P. Fizika nizkix temperatur, 2005. V. 31, № 7. P. 820–825.
6. Joseph D.D. Stability of fluid motions I. Vol. 27. Springer Science & Business Media, 2013. 282 p.
7. Joseph D.D. Stability of fluid motions II. Springer Tracts in Natural Philosophy Vol. 28. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1976. 276 p.
8. Chistyakov A.E., Fomenko N.A. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2018, № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/794.
9. Andronikashvili E`.L. Vospominaniya o zhidkom gelii [Memories of liquid helium]. Tbilisi: Ganatleba. 1980. 336 p.
10. Andronikashvili S.L., Zinov`eva K.N., Mamaladze Yu.G., Pitaevskij L.P. Mexanika v SSSR za 50 let. Tom 2. Mexanika zhidkosti i gaza. M: Nauka. 1970. P. 649-707.