Теория ступенчатых опор скольжения с несжимаемой и сжимаемой смазкой

А.В. Емельянов, И.А. Емельянов, И.А. Зенкина

Калужский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана

Аннотация: На основе уравнений Рейнольдса для тонких слоев вязкой ньютоновской жидкости найдены законы распределения давления в несжимаемых и сжимаемых несущих слоях ступенчатой опоры. Для достижения физически более ясного сравнения смазочных свойств и несущей способности двух разных смазочных сред использована плоская модель ступенчатой опоры. Получены алгоритмы вычисления подъемной силы и жесткости обоих смазочных слоев, позволяющие перейти к постановке и решению задач оптимизации безразмерных геометрических параметров и сравнительных интегральных характеристик гидродинамических и газодинамических ступенчатых опор скольжения.
Ключевые слова: смазочный слой, вязкость, давление, плотность, уравнения Рейнольдса, сплайны, число Петрова.

Введение

В статье [1] изложены характерные физические процессы, протекающие в несжимаемых и сжимаемых смазочных слоях опор скольжения разного типа, в том числе и ступенчатых опор, введенных в 1918 году Рэлеем. В то время в продолжении замечательной работы Жуковского и Чаплыгина [2] плоские модели подшипников скольжения рассматривались только потому, что пространственные задачи гидродинамической теории смазки были слишком сложны и практически неразрешимы традиционными аналитическим методами. Сегодня плоские модели привлекают наше внимание по другой причине: они более всего пригодны для изучения физических процессов, протекающих в несжимаемых и сжимаемых смазочных слоях. Вместе с тем, за прошедшее столетие мы научились формулировать и решать задачи оптимизации геометрии несущего слоя, а это требует излагать теорию в безразмерном виде как для несжимаемого, так и для сжимаемого смазочного слоя. В этом смысле современная теория не только газодинамических, но и гидродинамических опор скольжения представляет более совершенный этап развития науки о подшипниках скольжения.

1. Интегральные характеристики ступенчатой опоры с несжимаемой смазкой

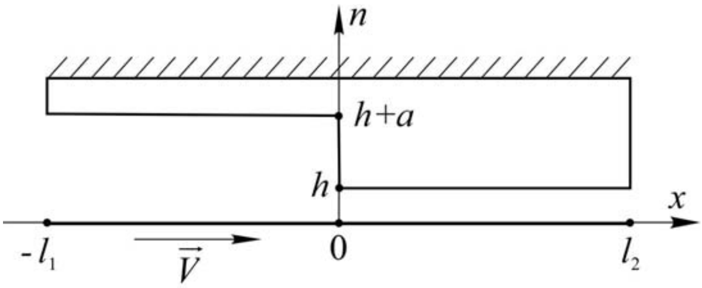

Рис. 1. – Ступенчатый подшипник скольжения с движущейся нижней стенкой смазочного слоя

На рис.1 схематически представлен ступенчатый подшипник протяженностью $l = l_1 + l_2$, где l_1 – протяженность глубокого слоя, а l_2 – мелкого. Обозначив глубину ступени символом a при толщине тонкого слоя h, введем относительную глубину ступени γ и относительную протяженность глубокого слоя ③ по правилу

$$\gamma = \frac{a}{h+a}, \quad ŕ = \frac{l_1}{l_1 + l_2} = \frac{l_1}{l}. \qquad (1)$$

В статье [3] выведены уравнения Рейнольдса для тонкого вязкого слоя ньютоновской жидкости в произвольных ортогональных криволинейных координатах. Эти уравнения имеют один и тот же вид для капельной жидкости (несжимаемая среда) и для газа (сжимаемая среда). Для ортогональной прямолинейной системы координат, введенной как показано на рис. 1, эти уравнения выглядят так:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial n^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \qquad (2)$$

где p – давление, ❍ – динамический коэффициент вязкости.

Второе уравнение (2) означает, что давление не зависит от переменной n. Это позволяет проинтегрировать первое уравнение по переменной n и получить равенство

$$V_x = \frac{n^2}{2\mu}\frac{dp}{dx} + C_1 n + C_2, \qquad (3)$$

в котором константы C_1 и C_2 должны соответствовать граничным условиям

$$V_x = V \text{ при } n = 0\,; \quad V_x = \begin{cases} 0 \text{ при } n = h + a - \text{для глубокого слоя,} \\ 0 \text{ при } n = h - \text{для мелкого слоя.} \end{cases} \tag{4}$$

Рассматривая соотношения (3) и (4) совместно, находим зависимость скорости частиц слоя от расстояния n от нижней стенки

$$\begin{aligned} V_{x1} &= V\frac{h+a-n}{h+a} - \frac{n(h+a-n)}{2\mu}\frac{dp_1}{dx}, \\ V_{x2} &= V\frac{h-n}{h} - \frac{n(h-n)}{2\mu}\frac{dp_2}{dx}. \end{aligned} \tag{5}$$

В этих соотношениях индекс 1 соответствует глубокому слою $(-l_1 \le x \le 0)$, а индекс 2 – мелкому $(0 < x \le l_2)$.

Пусть Q_1 и Q_2 – объемные расходы несжимаемой смазки в соответствующих областях слоя через участок подшипника шириной l. Справедливы очевидные равенства

$$Q_1 = l\int_0^{h+a} V_{x1}dn, \quad Q_2 = l\int_0^{h} V_{x2}dn. \tag{6}$$

После интегрирования находим:

$$Q_1 = l\left[\frac{V(h+a)}{2} - \frac{(h+a)^3}{12\mu}\frac{dp_1}{dx}\right], \quad Q_2 = l\left[\frac{Vh}{2} - \frac{h^3}{12\mu}\frac{dp_2}{dx}\right]. \tag{7}$$

Вследствие неразрывности течения эти расходы равны одной и той же величине Q. Поэтому, проинтегрировав первое равенство (7) по x в пределах от $x = -l$ до $x = 0$, а второе – от $x = 0$ до $x = l_2$, найдем функции $p_1(x)$ и $p_2(x)$ в форме

$$p_1 = p_0 + \frac{l_1 + x}{l}\left\{\frac{6\mu Vl}{(h+a)^2} - \frac{12\mu Q}{(h+a)^3}\right\}, \quad p_2 = p_0 + \frac{x - l_2}{l}\left\{\frac{6\mu Vl}{h^2} - \frac{12\mu Q}{h^3}\right\}. \tag{8}$$

В этих выражениях p_0 – давление на открытых границах смазочного слоя, т.е. при $x = -l_1$ и $x = l_2$.

Введем безразмерное давление P и безразмерную координату ☒ по правилу

$$P_1 = p_1/p_0, \quad P_2 = p_2/p_0, \quad \xi = x/l, \tag{9}$$

где p_0 – давление на открытых границах опоры $\left(\xi = -\acute{r} \text{ и } \xi = \alpha\right)$.

Теперь функции (8) преобразуются к безразмерному виду

$$P_1 = 1 + \left(\acute{r} + \xi\right)\left\{\Lambda \nu^2 - \frac{12\mu Q}{P_0 h^3}\nu^3\right\}, \quad P_2 = 1 + \left(\xi - \alpha\right)\left\{\Lambda - \frac{12\mu Q}{P_0 h^3}\right\}. \tag{10}$$

Новые безразмерные параметры имеют следующий смысл

$$\Lambda = \frac{6\mu V l}{p_0 h^2}, \quad \nu = \frac{h}{h+a} = 1 - \gamma, \quad \alpha = \frac{l_2}{l} = 1 - \acute{r}. \tag{11}$$

В зарубежных публикациях по газовой смазке ☹ именуют параметром сжимаемости. Но этот термин не соответствует его физическому смыслу уже потому, что он совершенно естественно появился в безразмерных давлениях в несжимаемых смазочных слоях (8). На самом деле ☹ – это важнейший критерий подобия в гидродинамической теории смазки, заложенной трудами Николая Павловича Петрова (1836-1920). Этот факт признан во всем мире, и мы предлагаем называть ☹ числом Петрова. Если нам возразят, указав на отсутствие этого параметра в трудах Н.П. Петрова [4], мы отклоним это возражение. Дело в том, что само выделение ☹ не является большим научным достижением, и сегодня едва ли кто-нибудь знает, в чьей работе впервые появился этот параметр. Чье-либо имя критерию подобия присваивается в память о человеке, внесшем крупный вклад в соответствующую отрасль науки. С этой точки зрения термин «число Петрова» для ☹ (11) и справедлив, и физически более правилен, чем зарубежное название этого критерия подобия.

Заметим, что второе слагаемое в круглой скобке (10) тоже безразмерная величина, которую естественно назвать безразмерным расходом Q^*. При этом объемный расход Q определится выражением

$$Q = \frac{p_0 h^3}{12\mu} Q^* . \tag{12}$$

Приравняв P_1 и P_2 при $\xi = 0$, найдем выражение Q^* и окончательный вид функций $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$:

$$Q^* = \frac{\alpha + \text{ѓ}\,\nu^2}{\alpha + \text{ѓ}\,\nu^3} \Lambda . \tag{13}$$

$$P_1 = 1 + \Lambda\theta_0(\text{ѓ} + \xi), \quad P_2 = 1 + \Lambda\theta_0(\alpha - \xi), \quad \theta_0 = \frac{\text{ѓ}\,\gamma\nu^2}{\alpha + \text{ѓ}\,\nu^3} .$$

Подъемная сила F, приложенная к выделенному участку подшипника, определяется так

$$F = l\left\{ \int_{-l_1}^{0} (p_1 - p_0)\,dx + \int_{0}^{l_2} (p_2 - p_0)\,dx \right\} = p_0 l^2 F^* . \tag{14}$$

Здесь F^* – безразмерная подъемная сила, определяемая выражением

$$F^* = \Lambda\theta_0 \left\{ \int_{-\text{ѓ}}^{0} (\text{ѓ} + \xi)\,d\xi + \int_{0}^{\alpha} (\alpha - \xi)\,d\xi \right\} = \Lambda\theta , \tag{15}$$

где

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha\gamma\nu^2 \frac{\text{ѓ}^2 + \alpha^2}{\alpha + \text{ѓ}\,\nu^3} . \tag{16}$$

Однако опора с достаточной подъемной силой окажется неработоспособной, если у смазочного слоя не будет необходимой жесткости K, определяемой как производная F по h с противоположным знаком. Введем относительное изменение толщины смазочного слоя h по правилу

$$\zeta = (h - h_0)/h_0 , \quad h = h_0(1 + \zeta), \tag{17}$$

где h_0 – номинальное значение h, при котором желательно иметь наилучшие характеристики опоры.

Теперь введем безразмерную жесткость K^* по правилу

$$K = \frac{p_0 l^2}{h_0} K^*, \quad K^* = \frac{dF^*}{d\zeta}. \tag{18}$$

Остается ввести зависимость числа Петрова Λ и безразмерной функции θ от ζ. Пусть Λ_0 – нормированное число Петрова

$$\Lambda_0 = \frac{6\mu V l}{p_0 h_0^2}, \quad \Lambda = \frac{\Lambda_0}{(1+\zeta)^2}. \tag{19}$$

Легко проверить справедливость соотношений

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1+\nu_0\zeta}, \quad \gamma_0 = \frac{a}{h_0 + a}, \quad \nu_0 = 1-\gamma_0, \quad \nu = 1-\gamma = \frac{\nu_0(1+\zeta)}{1+\nu_0\zeta}, \tag{20}$$

которые полностью определяют зависимость θ (16) от ζ. Понятно, что безразмерная жесткость K^* должна вычисляться как центральная производная

$$K^* = \frac{F^*(\zeta-\Delta\zeta) - F^*(\zeta+\Delta\zeta)}{2\Delta\zeta}. \tag{21}$$

Для практических расчетов в качестве $\Delta\zeta$ годится 0,005.

2. Интегральные характеристики газодинамической ступенчатой опоры

В подшипниках скольжения, использующих жидкостные смазки, смазочный слой не является изотермическим по протяженности. Например, в ступенчатой опоре (рис.1) тонкий слой $(0 < x \le l_2)$ будет нагреваться сильнее, чем слой в области ступени. Вязкость жидкостей с ростом температуры всегда уменьшается, в то время как вязкость газов при повышении температуры возрастает, хотя и очень слабо. В этом состоит одно из важных преимуществ газовой смазки: в то время, как в жаркую погоду жидкостная смазка вытекает из зазора подшипника, а в сильный мороз она густеет, затрудняя вращение, газодинамические подшипники одинаково хорошо работают и в жару, и в холод. Это свойство газов позволяет считать течение газа в рабочем зазоре подшипника изотермическим, когда плотность ρ пропорциональна давлению p

$$\rho = bp\,, \tag{22}$$

где $b = const$.

Выражения (5) для скоростей сохраняют силу, но объемные расходы (6) должны быть заменены массовыми

$$\begin{aligned} Q_1 &= bp_1 l \int\limits_0^{h+a} V_{x1} dn = \frac{bp_a^2 h_0^3}{12\mu}\left\{\Lambda_0 \frac{1+\zeta}{\nu} P_1 - \frac{(1+\zeta)^3}{\nu^3} P_1 \frac{dP_1}{d\xi}\right\}, \\ Q_2 &= bp_2 l \int\limits_0^{h} V_{x2} dn = \frac{bp_a^2 h_0^3}{12\mu}\left\{\Lambda_0 (1+\zeta) P_2 - (1+\zeta)^3 P_2 \frac{dP_2}{d\xi}\right\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Истинный массовый расход газа Q связан с безразмерным расходом Q^* равенством

$$Q = \frac{bp_a^2 h_0^3}{12\mu} Q^*, \tag{24}$$

где p_a – атмосферное давление.

Поскольку $Q_1 = Q_2$, то из равенств (23) и (24) вытекают уравнения

$$\frac{dP_1}{d\xi} = \nu^2\left(\Lambda - \frac{\nu Q^*}{\sigma^3 P_1}\right), \quad \frac{dP_2}{d\xi} = \Lambda - \frac{Q^*}{\sigma^3 P_2}, \quad \sigma = 1 + \varsigma. \tag{25}$$

Уравнения (25) должны интегрироваться численно методом Рунге-Кутта от открытых границ $(\xi = -ŕ$ и $\xi = \alpha)$ до ступени $(\xi = 0)$.

Связь (14) между подъемной силой F и безразмерной подъемной силой F^* сохраняется, хотя выражение F^* выглядит иначе

$$F^* = \int\limits_{-ŕ}^{0} (P_1 - P_0)\, d\xi + \int\limits_0^{\alpha} (P_2 - P_0)\, d\xi\,. \tag{26}$$

Эти интегралы должны вычисляться по формуле Симпсона на основе сеточных функций $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$, найденных из уравнений (25).

Заметим, что при несжимаемой смазке интегральные характеристики подшипника не зависят от давления окружающей среды, что и позволяет вводить безразмерное давление делением истинного давления p на давление окружающей среды p_0. В газодинамических подшипниках и подъемная сила, и жесткость несущего слоя существенно зависят от давления окружающей среды. Поэтому

$$P_1 = p_1/p_a, \quad P_2 = p_2/p_a, \quad P_0 = p_0/p_a \neq 1,$$

где p_a – атмосферное давление.

Выражение (21) для безразмерной жесткости K^* сохраняет силу, но связь между K и K^* выглядит несколько иначе

$$K = \frac{p_a l^2}{h_0} K^*. \tag{27}$$

Нелинейные уравнения (25) содержат неизвестную величину Q^*. И хотя ее, казалось бы, нетрудно найти, минимизируя невязку $\left|P_1(\xi=0) - P_2(\xi=0)\right|$, однако это возможно только при условии, что начальное приближение Q^* мало отличается от истинного. В противном случае при численном решении уравнений (25) возникнут серьезные проблемы. Попробуем найти начальное приближение Q^*, аппроксимировав функции $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ сплайнами

$$P_1 = P_0 + a_1(\text{ѓ} - \xi) + a_2(\text{ѓ} - \xi)^2, \quad P_2 = P_0 + b_1(\alpha - \xi) + b_2(\alpha - \xi)^2, \tag{28}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 – неизвестные константы. Как видно, условия на открытых границах рабочего зазора $\left(P_1(\xi = -\text{ѓ}) = P_0, P_2(\xi=\alpha) = P_0\right)$ в выражениях (28) уже соблюдены.

Необходимо найти еще пять уравнений для определения четырех коэффициентов (28) и безразмерного расхода Q^*.

Первое уравнение следует из условия равенства функций (28) при $\xi = 0$ (рис.1). это уравнение выглядит так:

$$\text{ѓ}\, a_1 + \text{ѓ}^{\,2} a_2 = \alpha b_1 + \alpha^2 b_2 . \qquad (29)$$

Еще два уравнения получим, записав дифференциальные уравнения (25) на открытых границах, т.е. при $\xi = -\text{ѓ}$ и $\xi = \alpha$ соответственно.

$$a_1 = \nu^2 \Lambda - \frac{\nu^3 Q^*}{\sigma^3 P_0}, \quad b_1 = -\Lambda + \frac{Q^*}{\sigma^3 P_0}, \quad \sigma = 1 + \zeta . \qquad (30)$$

Четвертое и пятое уравнения найдем, записав дифференциальные уравнения (25) по обе стороны от ступени $(\xi = 0)$

$$a_1 + 2\text{ѓ}\, a_2 = \nu^2 \Lambda - \frac{\nu^3 Q^*}{\sigma^3 P_1(0)}, \quad b_1 + 2\alpha b_2 = -\Lambda + \frac{Q^*}{\sigma^3 P_2(0)} . \qquad (31)$$

Здесь $P_1(0)$ и $P_2(0)$ – безразмерные давления при $\xi = 0$. Поскольку они равны, то, умножив второе уравнение на ν^3, а затем сложив его с первым, получим:

$$a_1 + 2\text{ѓ}\, a_2 + \nu^3 (b_1 + 2\alpha b_2) = \nu^2 \Lambda - \nu^3 \Lambda .$$

Подставив сюда a_1 и b_1 (30), получаем простое уравнение, связывающее коэффициенты a_2 и b_2

$$\text{ѓ}\, a_2 + \alpha \nu^3 b_2 = 0 . \qquad (32)$$

Совместное рассмотрение уравнений (29) и (30) приводит к другому уравнению, связывающему эти же коэффициенты

$$\text{ѓ}^{\,2} a_2 - \alpha^2 b_2 = -(\alpha + \text{ѓ}\, \nu^2)\Lambda + \frac{\psi_0 Q^*}{\sigma^3 P_0}, \quad \psi_0 = \alpha + \text{ѓ}\, \nu^3 . \qquad (33)$$

Из уравнений (32) и (33) находим αb_2, которое нам вскоре понадобится

$$\alpha b_2 = \frac{\alpha + \text{ŕ}\, \nu^2}{\psi_0}\Lambda - \frac{Q^*}{\sigma^3 P_0}. \qquad (34)$$

Во втором уравнении (31)

$$P_2(0) = P_0 + \alpha b_1 + \alpha^2 b_2 = P_0 + \psi_1 \Lambda, \quad \psi_1 = \alpha \text{ŕ}\, \gamma \nu^2 / \psi_0,$$

поэтому оно приводится к виду

$$\frac{Q^*}{\sigma^3} = \left(P_0 + \psi_1 \Lambda\right)\left(\Lambda + b_1 + 2\alpha b_2\right). \qquad (35)$$

Вторая скобка этого уравнения преобразуется с использованием равенства (34) и выражения b_1 (30) и принимает вид

$$\Lambda + b_1 + 2\alpha b_2 = 2\psi_2 \Lambda - \frac{Q^*}{\sigma^3 P_0}, \quad \psi_2 = \left(\alpha + \text{ŕ}\, \nu^2\right)/\psi_0. \qquad (36)$$

Совместное рассмотрение уравнения (35) и первого равенства (36) позволяет получить начальное приближение отношения Q^*/σ^3, содержащегося в уравнениях (30)

$$\frac{Q_0^*}{\sigma^3} = \frac{\psi_2 \Lambda \left(P_0 + \psi_1 \Lambda\right)}{1 + \psi_1 \Lambda / 2P_0}.$$

Итак, алгоритм нахождения интегральных характеристик газодинамического ступенчатого подшипника включает в себя численное решение двух дифференциальных уравнений первого порядка (25). Различные попытки линеаризовать нелинейные уравнения для давления в смазочных слоях любых газодинамических подшипников давно исчерпали себя, оказавшись малоэффективными. Однако прямые численные методы решения двумерных краевых задач газовой смазки [6, 7] чрезвычайно трудоемки и до сих пор не годятся для решения задач оптимизации с большим числом оптимизируемых параметров.

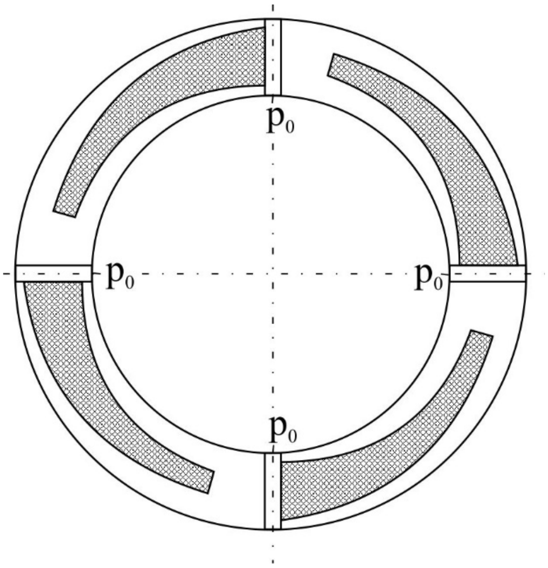

Рис. 2. – Геометрия узкого ступенчатого подшипника с четырьмя автономными опорными элементами

Многочисленные преимущества подшипников со спиральными канавками [1, 5, 6, 7-12] не означают, что они всегда могут применяться вместо опор другого типа. Например, если конструктивные особенности изделия требуют использовать узкую кольцевую опору, то спиральные канавки окажутся малоэффективными. В этом случае ступенчатая опора будет работать лучше. Но она должна иметь вид, изображенный на рис.2. Глубокий слой выделен темным фоном. Ширина его должна уменьшаться по мере приближения к ступени, чтобы боковые выступы расширялись и сокращали утечки сжатого газа из области повышенного давления.

Заключение

Изложенный метод расчета интегральных характеристик ступенчатой опоры с несжимаемой и сжимаемой смазкой является основой для вычисления оптимальных геометрических параметров и исследования различных физических факторов на работу подшипника скольжения. Эти результаты будут представлены в следующей статье.

Литература

1. Емельянов А.В., Емельянов И.А., Зенкина И.А. Анализ физических процессов, протекающих в смазочных слоях газодинамических подшипников // Инженерный вестник Дона. 2017. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4458.

2. Жуковский Н.Е., Чаплыгин С.А. О трении смазочного слоя между шипом и подшипником // Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т.XIII, вып.1. 1906. С. 24-33.
3. Емельянов А.В., Емельянов И.А., Зенкина И.А. Уравнения Рейнольдса для тонкого слоя вязкой среды в произвольных криволинейных ортогональных координатах // Инновационная наука. 2016. №11-3. С. 16-23.
4. Петров Н.П. Гидродинамическая теория смазки. Избранные работы. АН СССР, 1948. 550 с.
5. Емельянов А.В., Емельянов Л.А. Нелинейная теория прецизионных радиально-осевых подшипников с газовой смазкой и анизотропной геометрией // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1983. №6. С. 1116-124.
6. Емельянов А.В., Степанчук В.И. Нелинейные эффекты в газодинамических подпятниках со спиральными канавками // Машиноведение. 1983. №4. С. 91-100.
7. Винокуров В.Н., Емельянов А.В. Специфические эффекты в работе радиальных газостатических подшипников при большой эксцентричности // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2007. №1. С. 109-115.
8. Зенкина И.А. Математическое моделирование газодинамических подшипников со спиральными канавками: дис. … канд. физ-мат. наук: 05.13.18. Калуга, 2004. 262 с.
9. Зенкина И.А. Интегральные характеристики гладкого цилиндрического подшипника с дросселирующей щелью // Южно-Сибирский научный вестник. 2015. №4(12). С. 31-35.
10. Зенкина И.А. Главный момент сил сопротивления в газодинамическом подшипнике со спиральными канавками // Инженерный вестник Дона. 2014. №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2014/2548.

11. Yemelyanov, A.V. and Yemelyanov I. A, 1999. Physical models, theory and fundamental improvement to self-acting spiral-grooved gas bearings and visco-seals. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 4(V. 213): pp. 263-271.
12. Emel'yanov, A.V. and Emel'yanov I. A, 2000. Theory of binary spiral-grooved gas bearings. Fluid Dynamics, 3(V. 35): pp. 351-360.

References

1. Emeljanov A.V., Emeljanov I.A., Zenkina I.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2017. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4458.
2. Zhukovskij N.E., Chaplygin S.A. Trudy Otdelenija fizicheskih nauk Obshhestva ljubitelej estestvoznanija, t.XIII, №1. 1906. pp. 24-33.
3. Emeljanov A.V., Emeljanov I.A., Zenkina I.A. Innovacionnaja nauka. 2016. №11-3. pp. 16-23.
4. Petrov N.P. Gidrodinamicheskaja teorija smazki. Izbrannye raboty [Hydrodynamic theory of lubrication. Selected works]. AN SSSR, 1948. 550 p.
5. Emeljanov A.V., Emeljanov L.A. Izvestija AN SSSR. Mehanika zhidkosti i gaza. 1983. №6. pp. 1116-124.
6. Emeljanov A.V., Stepanchuk V.I. Mashinovedenie. 1983. №4. pp. 91-100.
7. Vinokurov V.N., Emelyanov A.V. Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin. 2007. №1. pp. 109-115.
8. Zenkina I.A. Matematicheskoe modelirovanie gazodinamicheskikh podshipnikov so spiral'nymi kanavkami [Mathematical modeling of gasdynamic bearings with spiral flutes]: dis. … kand. fiz-mat. nauk: 05.13.18. Kaluga, 2004. 262 p.
9. Zenkina I.A. Juzhno-Sibirskij nauchnyj vestnik. 2015. №4 (12). pp. 31-35.
10. Zenkina I.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2014. №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2014/2548.

11. Yemelyanov, A.V. and Yemelyanov I. A, 1999. Physical models, theory and fundamental improvement to self-acting spiral-grooved gas bearings and visco-seals. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 4(V. 213): pp. 263-271.
12. Emel'yanov, A.V. and Emel'yanov I. A, 2000. Theory of binary spiral-grooved gas bearings. Fluid Dynamics, 3(V. 35): pp. 351-360.