Инженерный вестник Дона, №4 (2015)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2015/3399

Алгоритм решения обратной задачи распределения неоднородных ресурсов

И.Ю. Зильберова[1], А.Л. Маилян[2], Р.Г. Нехай[1]

[1]Ростовский государственный строительный университет
[2]Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Аннотация: Задачи оптимального распределения ресурсов — одни из основных оптимизационных задач, решаемых при проектировании сложных систем, определении их структуры и способов функционирования, поэтому в данной работе рассмотрен один из разностных методов решения обратных задач распределения неоднородных ресурсов.
Ключевые слова: алгоритм, план, ресурсы, единицы, метод наименьших отклонений, поднадзорные ресурсы, распределения, принцип наименьшего отклонения, матрица, оптимальный элемент, вероятность, индексы.

Обратную задачу распределения неоднородных ресурсов сформулируем следующим образом. Необходимо так выбрать количество средств, указать такой вариант их распределения по обслуживаемым единицам продукта и предложить такие способы их действий, чтобы заданный уровень эффективности выполнения средствами поставленной задачи достигался при их минимальном расходе.

Итак, необходимо найти такое минимальное значение средств $\{n_i\}$, $i=1,N^*$ и так распределить их по единицам продукта $\{m_i\}$, $j = 1,M$, чтобы эффект обслуживания каждой из единиц P_j был не менее некоторого заданного значения P_j^3.

План распределения средств будем характеризовать матрицей $h=\{h_{ij}\}$, где:

$$h_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{средство } i \text{ не выделяется для обслуживания } i-\text{й единицы продукта;} \\ 1, & \text{средство } i \text{ выделяется для обслуживания } j-\text{ой единицы продукта.} \end{cases}$$

Таким образом, необходимо найти такие значения N^* и h^*, которые являются решением задачи:

$$\min(N(h)/P_j \geq P_j^3; \quad N^* \leq N; \quad h \in H) \qquad (1)$$

$$P_j = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - h_{ij}P_{ij}); \qquad (2)$$

P_{ij} — вероятность выполнения задачи i-м средством по j-й единице продукта;

H — множество возможных планов распределения средств.

Множество H может быть задано ограничениями, записываемыми, например, в виде:

$$\sum_{j=1}^{M} h_{ij} \le 1; \qquad i = \overline{1, N} \qquad (3)$$

— каждое средство может быть назначено не более чем на одну единицу продукта:

$$\sum_{i=1}^{N} h_{ij} \le V; \qquad j = \overline{1, M} \qquad (4)$$

— за каждой единицей может быть закреплено не более V средств.

Наиболее распространенные методы решения обратных задач — различные модификации метода случайного поиска, метод динамического программирования и др. [1]. Однако применение этих методов в ряде случаев, особенно для задач большой размерности, не является эффективным, что связано со значительным числом итерационных вычислений для определения решения, а, следовательно, увеличением времени решения задачи на ЭВМ [2].

Одним из путей преодоления вычислительных трудностей и снижения временных затрат на решение задачи является использование разностных методов, суть которых заключается в последовательном назначении единиц ресурса таким образом, чтобы в итоге обеспечить решение задачи, близкое к оптимальному.

Рассмотрим матрицу эффективности распределения $P=\{P_{ij}\}$, $i=\overline{1,N}$; $j=\overline{1,M}$:

$$P=\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1M} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2M} \\ P_{N1} & P_{N2} & \dots & P_{NM} \end{vmatrix}$$

Очевидно, что можно составить некоторую матрицу назначений H^*, соответствующую матрице P и определяющую минимальное количество средств, назначенных на каждую единицу продукта без взаимного учета задействования средств по другим единицам, т. е. без учета ограничений (3).

Матрица H^* может быть представлена, например, следующим образом:

$$H^*=\begin{vmatrix} 0 & 11 & \dots & 0 \\ 0 & 10 & \dots & 0 \\ 1 & 00 & \dots & 1 \\ 1 & 01 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Такая матрица описывает нереальный план распределения средств $h\in H$, поскольку некоторые средства в нем одновременно выделяются на несколько единиц продукта. Однако этот план дает нижнюю границу значений критерия качества решения задачи:

$$N\_=\inf N=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}h_{ij}^{*} \qquad (5)$$

Очевидно, что составлять реальный план целесообразно таким образом, чтобы на каждом шаге при назначении средств как можно меньше отклоняться от этой границы.

Соотношение (5) перепишем в следующем виде:

$$N\_=\sum_{k=1}^{M}n_k^{*};\quad n_k^{*}=\sum_{i=1}^{N}h_{ik}^{*}; \qquad (6)$$

где n_k^* —минимальное число средств, которое необходимо назначить на *k-ю* единицу продукта для выполнения условия (2) без учета ограничения (3).

Таким образом, значения h^{*}_{ik} , а следовательно, и n^{*}_{k} $(k=\overline{1,M})$ могут быть определены путем решения *M* следующих задач:

$$n_k{}^{*} \xrightarrow[h_{ik}]{} \min; \tag{7}$$

при условии:

$$1-\prod_{i=1}^{N}(1-h_{ik}{}^{*}P_{ik}) \geq P_k^3; \quad k=\overline{1,M}$$

где $P_k{}^3$ — заданный уровень эффективности обслуживания *k*-й единицы продукта, или:

$$\min(n_k{}^{*}(h_{ik})/P_k \geq P_k^3).$$

При назначении одного из средств на каждом шаге распределительного процесса будем использовать принцип наименьшего отклонения величины наряда средств, полученного с учетом назначения средства *i** на единицу продукта *j**, от нижней границы критерия *N_*.

Это означает, что для реального назначения следует выбирать элемент *(i*, j*),* обеспечивающий выполнение условия

$$(i^{*}, j^{*}): \min_{i,j} \Delta_{ij}; \quad i=\overline{1,N}; \ j=\overline{1,M}, \tag{8}$$

$$\Delta_{i\,j}=\sum_{h=1}^{M}(n_k^{ij}-n_k{}^{*}); \quad \Delta_{i\,j} \geq 0$$

$n_k{}^{ij}$ — минимальное число средств, выделяемых на *k-ю* единицу продукта с учетом назначения средства *i* на единицу продукта *j*. Наряд средств, соответствующий назначению определенного средства *i** на определенную единицу продукта *j**, характеризуется планом распределения $H^{i^{*}j^{*}}$ и вектором $\{n_k{}^{i^{*}j^{*}}\}$ $(k=\overline{1,M})$, которые также находятся путем решения *M* задач:

$$n_k{}^{i^{*}j^{*}} \xrightarrow[h_{ik}]{} \min; \tag{9}$$

при условии:

$$P_k=1-\prod_{i=1}^{N}(1-h_{ik}P_{ik}) \geq P_k^3; \quad h_{i^{*}j^{*}}=1; \quad h_{i^{*}j}=0; \quad j \neq j^{*};$$

или:

$$\min(n_k^{i^*j^*}(h_{ik})/P_k \geq P_k^3; \quad h_{i^*j^*}=1; \quad h_{i^*j}=0; \quad j \neq j^*)$$

Таким образом, на каждом шаге процесса оптимизации требуется поддержание такого порядка распределения средств, который обеспечивает наименьшее приращение критерия [3 - 10].

Решение задачи в данном случае разбивается на ряд одномерных задач, что повышает эффективность метода при его реализации на ЭВМ.

1. Вычислить элементы $n_k^{*(0)}$, удовлетворяющие условию

$$n_k^{*(0)} \xrightarrow[h_{ik}]{} \min; \quad i=\overline{1,N}; \quad k=\overline{1,M}; \quad P_k \geq P_k^3$$

2. Вычислить элементы $n_k^{i^*j^*(t)}$ удовлетворяющие условию

$$n_k^{i^*j^*(t)} \xrightarrow[h_{ik}]{} \min; \quad i,i^* \in N^{(t)}; \quad P_k \geq P_k^{3(t)};$$
$$j,j^* \in M^{(t)}; \quad h_{i^*j^*}=1; \quad k=\overline{1,M}; \quad h_{i^*j}=0,$$

где $N^{(t)}$ — множество средств, не использованных к t-му шагу вычислительного процесса;

$M^{(t)}$ — множество единиц продукта, не обслуженных к t-му шагу вычислительного процесса;

$P_k^{3(t)}$ — заданная вероятность обслуживания *k-й* единицы продукта к t-му шагу вычислительного процесса.

3. Вычислить элементы матрицы $\Delta=\{\Delta_{ij}\}$ по соотношениям

$$\Delta_{ij}=\sum_{k=1}^{M^{(t)}}(n_k^{ij(t)}-n_k^{*(t)}); \quad i \in N^{(t)}; \quad j \in M^{(t)}$$

4. Закрепить средство i^* за j^* единицей продукта согласно условию:

$$\Delta_{i^*j^*}=\min_{i,j}\Delta_{ij}$$

5. Пересчитать P_j^3

$$P_{j^*}^{3(t+1)}=1-\frac{1-P_{j^*}^{3(t)}}{1-P_{i^*j^*}}=\frac{P_{j^*}^{3(t)}-P_{i^*j^*}}{1-P_{i^*j^*}};$$
$$P_{j^*}^{3(t+1)}=P_{j^*}^{3(t)}; \quad j \neq j^*$$

6. Пересчитать n_j^*:

$$n_{j^*}^{*(t+1)} = n_{j^*}^{*(t)} - 1;$$
$$n_j^{*(t+1)} = n_j^{*(t)}; \quad j \neq j^*$$

7. Проверить условие $P_{j^*}^{3(t+1)} \geq 0$:

$$\begin{cases} да - M^{(t+1)} = M^{(t)}; \\ нет - M^{(t+1)} = M^{(t)} - 1; \quad n_{j^*} = n_{j^*}^{*(0)} - n_{j^*}^{*(t+1)} \end{cases}$$

8. Проверить условие $M^{(t+1)}=0$:

$$\begin{cases} да - перейти\ к\ п.10; \\ нет - перейти\ к\ п.9; \end{cases}$$

9. Проверить условие $t \leq N$:

$$\begin{cases} да - перейти\ к\ п.2, t = t+1; \\ нет - перейти\ к\ п.10; \end{cases}$$

10. Конец.

При выборе элементов *(i*, j*)* в п. 5 возможны случаи существования нескольких пар индексов, которые реализуют условие:

$$\Delta_{i^* j^*} = \min_{i,j} \Delta_{ij} \quad (10)$$

Другими словами, появляется неоднозначность в выборе элементов (i^*, j^*). Возникшую неоднозначность можно разрешить следующим образом. Назовем оптимальным элементом матрицы Δ элемент, соответствующий индексам, определяемым из условия (10). Обозначим: $N_{i^*\ j}$ — число оптимальных элементов, вычеркиваемых из столбца матрицы Δ при выборе оптимального элемента (i^*, j^*); $N_{i\ j^*}$ — число оптимальных, элементов, вычеркиваемых из строки матрицы Δ при выборе оптимального элемента (i^*, j^*).

Тогда $N_{i^*\ j^*} = N_{i^*\ j} + N_{i\ j^*}$ — число оптимальных элементов, вычеркиваемых из матрицы Δ при назначении оптимального элемента (i^*, j^*).

Поставив в соответствие каждому оптимальному элементу величину $N_{i^*j^*}$, будем производить назначение этих элементов в порядке возрастания

$N_{i^*j^*}$, начиная с оптимальных элементов, соответствующих наименьшим значениям этого показателя. Оптимальные элементы, оказавшиеся в строке или столбце назначенного оптимального элемента, из дальнейшего рассмотрения на данном шаге распределительного, процесса исключаются.

Литература

1. Борисов А.Н., Алексеев А.В., Меркурьева Г.В. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений // Радио и связь. 1989. 304 с.

2. Белоусов В.Е., Гайдук А.В., Золоторев В.Н. К проблеме решения задач многокритериальной оптимизации // Системы управления и информационные технологии. 2006. № 3(25). С. 34-43.

3. Баркалов С.А., Белоусов В.Е., Урманов И.А. Алгоритм построения частных решающих правил при анализе систем организационного управления // Вестник Воронеж. гос. техн. ун-та. 2009. №Т.5, №2. С. 129-133.

4. Шеина С.Г., Миненко А.Н Концепция экосистемного подхода управления строительным объектом на проектной фазе жизненного цикла // Научное обозрение. 2014. №7-2. С. 580-582.

5. Шеина С.Г., Хамавова А.А Систематизация информации о состоянии территориального развития субъекта Российской Федерации // Научное обозрение. 2014. №8-3. С. 881-887.

6. Сеферян Л.А., Зильберова И.Ю. Стимулирование предприятий сферы управления при отсутствии рыночных мотиваций // Научное обозрение. 2014. №10-2. С. 508-511.

7. Зильберова И.Ю., Героева А.М. Прогнозирование и диагностика технического состояния объектов коммунальной инфраструктуры // Инженерный вестник Дона, 2012, №4 (ч.1) URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1074/.

8. Зильберова И.Ю., Высоковская Л.В. Особенности проектирования в России // Инженерный вестник Дона, 2012, №4 (ч.1) URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1081/.

9. Lootsma, F.A. (1993) Scale sensitivity in the Multiplicative AHP and SMART, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, Vol. 2, pp. 87-110.

10. Lootsma F.A., Schuijt H. (1997) The multiplicative AHP, SMART and ELECTRE in a common contex.- J. Multi-Criteria Decision Analysis, Vol. 6, pp. 185-186

References

1. Borisov A.N., Alekseev A.V., Merkur'eva G.V. Obrabotka nechetkoy informatsii v sistemakh prinyatiya resheniy [Processing fuzzy information in decision support systems]. Radio i svyaz', 1989. 304 p.

2. Belousov V.E., Gayduk A.V., Zolotorev V.N. Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii. 2006. № 3(25). pp. 34-43.

3. Barkalov S.A., Belousov V.E., Urmanov I.A. Vestnik Voronezh. gos. tekhn. un-ta. 2009. №T.5, №2. pp. 129-133.

4. Sheina S.G., Minenko A.N. Nauchnoe obozrenie. 2014. №7-2. pp. 580-582.

5. Sheina S.G., Khamavova A.A. Nauchnoe obozrenie. 2014. №8-3. pp. 881-887.

6. Seferyan L.A., Zil'berova I.Y. Nauchnoe obozrenie. 2014. №10-2. pp. 508-511.

7. Zil'berova I.Y., Geroeva A.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №4 (p.1) URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1074/.

8. Zil'berova I.Y., Vysokovskaya L.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №4 (p.1) URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1081/.

9. Lootsma, F.A. (1993) Scale sensitivity in the Multiplicative AHP and SMART, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, Vol. 2, pp. 87-110.

10. Lootsma F.A., Schuijt H. (1997) The multiplicative AHP, SMART and ELECTRE in a common contex. J. Multi-Criteria Decision Analysis, Vol. 6, pp. 185-186.