

---

## Математическое моделирование нечёткого дешифратора

*Н.В. Кудинов, В.В. Долгов*

*Донской Государственный Технический Университет, Ростов-на-Дону*

**Аннотация:** Исследован подход к построению компьютерной модели функционального преобразователя информации на основе поэлементных операций с многомерными таблицами чисел. Был построен и верифицирован численный алгоритм принятия решения на основе бесконечнозначной логики (в частности алгоритмы фаззификации, импликация, агрегирования, дефаззификации). Исследована математическая, алгоритмическая и программная модель нечёткого дешифратора позиционного биполярного кода в одноединичный, функционирующего как функциональный преобразователь. Показан переход от исходной модели заданной в терминах трёхзначной логики к аналогичной системе имеющей бесконечнозначный логический базис. Численный алгоритм был протестирован и отлажен в среде пакета математических вычислений GNU Octave [1] при минимальном использовании функций из пакета «fuzzy-logic-toolkit».

**Ключевые слова:** дешифратор, одноединичный код, функциональный преобразователь, бесконечнозначная логика, Т-норма, фаззификация, импликация, агрегирование, дефаззификация, троичная логика, биполярный код.

**Введение.** Исследуются возможности подхода описания нечётких логических систем [2] к устройствам, обрабатывающим цифровую информацию и физическим процессам сопровождающих цифровые преобразования. Проблематика исследования носит методический характер, связанный с актуальной для учебного процесса задачей моделирования систем передачи информации, в том числе и физических процессов, протекающих в этих системах. При моделировании длинных линий связи особо внимание уделяется частотным характеристикам и переходным процессам, протекающих в кабельных системах, что в принципе позволяет отнести процессы передачи информации, с некоторыми допущениями к аналоговым. Зачастую обходится стороной вопрос влияния переходных режимов в базовых компонентах вычислительной техники - триггерах, компараторах, транзисторах.

Математическая модель проводной линии связи, с некоторыми допущениями может быть представлена хорошо известной системой дифференциальных уравнений, называемой телеграфной. Цифровые же

устройства, выполняющие кодирование, формирование сигналов и измерение и декодирование обычно описываются логическими функциями и соответственно не могут непосредственно “стыковаться” с телеграфной моделью. В рамках поиска решения этой проблемы решается вспомогательная задача анализа адекватности и факторов, приводящих к неадекватности аппарата нечёткой логики при описании процессов в цифровых системах. Технически данная модельная задача может быть решена для конкретного цифрового устройства. В качестве частного примера выбрана задача количественного описания физических процессов, происходящих в цифровом дешифраторе, обеспечивающим в цифровой области логическую функцию дешифрации цифровых символов формата  $2 \times 4$  – 2 входа, 4 выхода (рис. 1) [3], часто применяемого для формирования разрешающего сигнала работы подсистемы (CS – chipselect) на одном из выходных линий, номер которой равен адресному числу, подаваемому на вход.

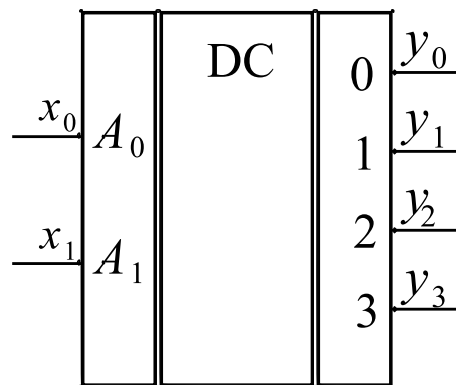


Рис. 1. – Условное графическое обозначение дешифратора  
позиционного двоичного кода

С позиций системного анализа эта математическая модель и решающий задачу симуляции численный алгоритм, позволяющая должна описывать функциональное преобразование входных параметров некоторой цифровой подсистемы в значения выходов непрерывным и монотонным образом в смысле отображения Липшица, для которого в узлах выполняется условия

равенства входным константам, определяемыми логической функцией устройства [4].

Схемотехнически входы такой системы обычно строятся из системы компараторов – дупорогового компаратора. Статическая характеристика компаратора имеет две устойчивых ветви – характеризующих область равенства и неравенства входных сигналов и переходную зону, характеризующую неопределённость процесса сравнения. Проверяется одна из методологий описания процессов в таких системах - модели нечёткого логического преобразования. В качестве упрощающего допущения считается, что входные цифровые символы описываются сигналами разной полярности  $x_0, x_1 \in [-1; 1]$ . Например, такие (разнополярные) сигналы могут существовать в канале связи, в котором сообщения, состоящие из символов конечного алфавита (цифры), передающихся сигналами, закон формирования которых определяется биполярным кодом NRZ или трёхуровневым кодом RZ или MLT-3.

Подобные статические модели не могут быть очень точными, потому что не могут учесть динамических накопительных эффектов в элементах электронных схем, но монотонность и непрерывность, используемых математических преобразований позволят формально объединить цифро-логические законы произвольной природы и назначения с законами распространения электромагнитных колебаний в единую математическую систему, за счёт того что нечёткие системы расширяют область значений сигнала до бесконечного компактного множества  $R^n$  – непрерывного отрезка вещественной прямой, позволяя описывать переходные зоны и эффекты гистерезиса технических устройства.

**Постановка задачи.** Целью исследования является количественное описание физических процессов, протекающих в цифровых устройствах, входящих в состав длинных (аналоговых) линий проводной цифровой связи

для построения компьютерных симуляторов физического уровня сетевых протоколов.

Решается сопутствующая задача - анализ полноты алгоритма нечёткого логического преобразования и выражение его отдельных этапов в виде вычислимых процедур.

**Концептуальная модель и первичные допущения.** За основу описания модели взята таблица истинности дешифратора  $2 \times 4$  с двумя входами  $A_1$  и  $A_2$ , с разрешёнными информационными уровнями 0 и 1 [5] и промежуточным «высокоимпендансным», обозначаемым «х» [6]. Моделирование устройств, обрабатывающих биполярный код принято решение расширить диапазон входных напряжений, для чего в рассмотрение вводится функция, переводящая значения сигнала из диапазона  $[0,1]$  в диапазон  $[-1,1]$  путём линейного преобразования. Две единицы противоположной полярности (входы  $A_1$  и  $A_2$ ) в коде RZ интерпретируются как информационные, а промежуточный «0», как уровень необходимый для обеспечения различия тактов передачи цифровых символов. В дальнейшем мы будем отождествлять этот символ («0») с неопределённым значением, что не ограничивает общности структуры исследуемой математической модели. В трёхзначной логике используются обозначения: истинно – 1, ложно – 0, неопределённо –  $\frac{1}{2}$  [6, 7]. Исходные и преобразованные к этим обозначениям  $(-1 \rightarrow 0 \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow x)$  варианты входных кодов, а также одноединичный выход дешифратора в униполярном  $(\overline{D_0}, \overline{D_1}, \overline{D_2}, \overline{D_3})$  и биполярном  $(D_0, D_1, D_2, D_3)$  вариантах показаны в таблице 1. Подобная таблица истинности позволяет спроектировать минимальную структуру дешифратора, записав соответствующие конъюнктивные нормальные формы логических функций  $D_i = f(A_1, A_2)$ .

Описываемый дешифратор состоит из двух компараторов и логического устройства сравнения, которые в свою очередь представляют собой систему проводящих и полупроводниковых устройств, работающих как правило в режиме насыщения и отсечки. В промежуточном состоянии транзисторы работают в режиме усиления. Такое комбинационное устройство может быть смоделировано таблицей 1, булевыми функциями, вычислительным алгоритмом.

Таблица 1

Таблица истинности дешифратора 2x4 с биполярными входами и выходами

Адрес, вход				Состояние выходов							
симм. тр. симв. код		несимм. тр. симв. код		несимм. тр. симв. код				симм. тр. симв. код			
A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	$\overline{D_0}$	$\overline{D_1}$	$\overline{D_2}$	$\overline{D_3}$	D <sub>3</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>0</sub>
-1	-1	0	0	0	0	0	1	-1	-1	-1	1
-1	0	0	x	0	0	x	x	-1	-1	0	0
-1	1	0	1	0	0	1	0	-1	-1	1	-1
0	-1	x	0	0	x	0	x	-1	0	-1	0
0	0	x	x	x	x	x	x	0	0	0	0
0	1	x	1	x	0	x	0	0	-1	0	-1
1	-1	1	0	0	1	0	0	-1	1	-1	-1
1	0	1	x	x	x	0	0	0	0	-1	-1
1	1	1	1	1	0	0	0	1	-1	-1	-1

Будем считать возможным промоделировать подобное устройство системой бинарных операций (t-норма и t-конорма) на непрерывном отрезке [0,1] получив новое качество модели из-за непрерывности и монотонности этих преобразований и тем самым учётом возможности описать переходные зоны вентильных вычислительных приборов.

**Допущения, составляющие основу моделирования.** Значение выходов в половине строк таблицы 1, для входов с промежуточным нулевым уровнем, получены при допущении что этот уровень соответствует

неопределённому состоянию входа и реализация чёткого “0” или “1” на этом входе равновероятны, поэтому неопределённое значение на «позиционном» входе соответствует неопределённому значению на двух «однородных» выходах. Такое допущение по уровню четкости символа «0» или «х» позволяют уменьшить кол-во выходов с 9 до 4, таким образом нечёткость одного из входных символов понижает кол-во информации, одновременно преобразуемой дешифратором. Наиболее наглядным изображением желаемых вход-выходных цифровой характеристики дешифратора, обрабатывающего биполярный входной код и промежуточное переходное состояние является трёхпараметрическая таблица чисел (рис. 2).

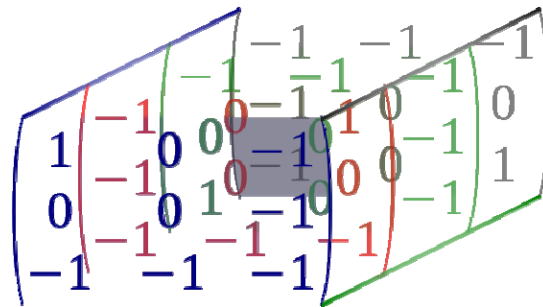


Рис. 2. – Трёхпараметрическая таблица дешифрации биполярного позиционного кода в биполярный одноразрядный

Следуя хорошо обусловленной части методологии построения систем нечёткого вывода, распространим предположение о нечёткости на все возможные входные символы, введя функции принадлежности входного сигнала, поступающего в дешифратор по двум независимым каналам. Под нечёткостью, по мнению авторов, понимается два несвязных свойства множеств – возможность иметь общее подмножество и вычислимость величины степени перехода границы множества в долях от 1. В качестве функций принадлежности выбраны кусочно-линейные трапецевидные функции принадлежности (см. рис. 3), относящиеся к подклассу финитных, аппроксимирующие вход-выходные зависимости двухпороговых компараторов. Параметры функций принадлежности (см. табл. 2) – положение фронта и среза выбраны из соображений упорядоченности

финитных функций (ненулевых на отрезке) по среднему значению их носителя (отрезок на котором функция отлична от 0).

Функциональное преобразование  $\mu(A)$  можно образно представить как замену исходного сигнала набором его «взвешенных» оценок  $\mu^{neg}(A), \mu^{zero}(A), \mu^{pos}(A)$ , что может быть интерпретировано, как сопоставление величины сигнала с двумя возможно неравномерными, но монотонными и взаимовложенными измерительными шкалами  $\{neg, zero, pos\}$  и  $[0,1]$ .

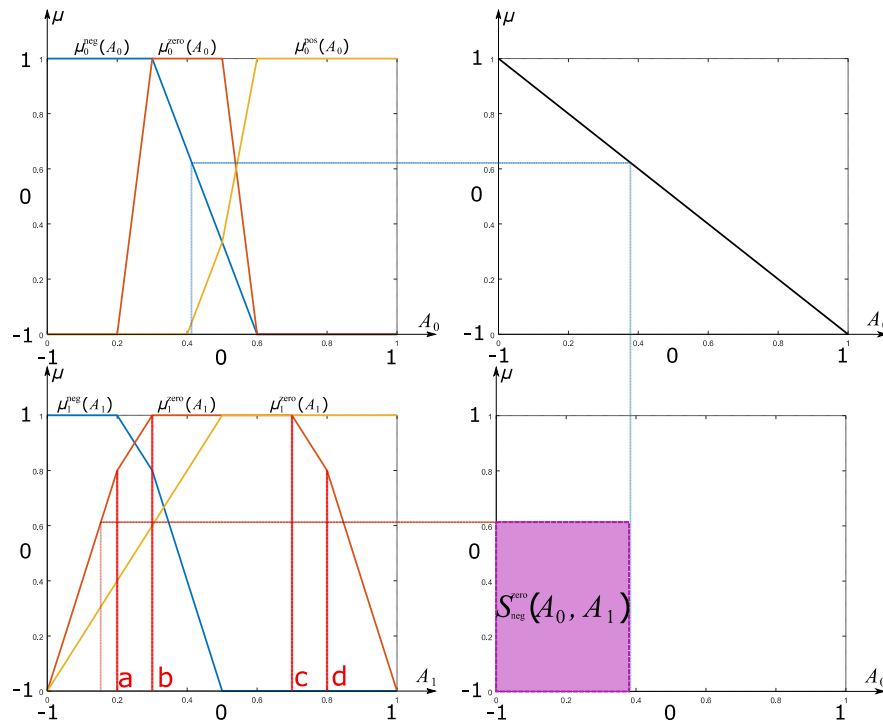


Рис. 3. – Графическая интерпретация нечёткой импликации

Таблица 2

Параметры трапецевидной функции принадлежности

Измеряемая величина (x)	Диапазон измеряемой величины	Значения функций принадлежности	Memberfunction	Параметры функции принадлежности			
				a	b	c	d
A <sub>0</sub>	[0,1]	отрицательное	trapmf	0	0	0.3	0.6
		неопределённое	trapmf	0.2	0.25	0.55	0.6
		положительное	trapmf	0.45	0.6	1	1.1

A <sub>1</sub>	[0,1]	отрицательное	trapmf	0	0	0.25	0.5
		неопределённое	trapmf	0	0.25	0.75	1
		положительное	trapmf	0	0.5	1	1.1

**Модель континуальной композиции.** Формально модель функционального преобразователя без состояния, описывается операторами или функциями, изучаемых в математическом анализе и теории функций комплексного переменного. Математическая структура нечёткого контроллера определяется информационным обеспечением каждого этапа алгоритма нечёткого вывода и принятия решения: приведение к нечёткости, нечёткой импликации, в частности композиция, усечение; агрегирование, дефаззификация (объединение оценок значимости) всех вариантов состояния технической системы методом центра тяжести на единичном отрезке.

Точно также, как и в двоичном дешифраторе входы информационно объединяются при помощи операции, обобщающей бинарную конъюнкцию  $(a \vee b) \equiv ab \pmod{k}$  (см. рис. 3).

Основным структурным отличием разрабатываемого дешифратора от двоичного в плане импликации является наличие связей для тех сочетаний значений принадлежностей A<sub>0</sub> и A<sub>1</sub> для которых значения трёхпараметрической таблицы отличны от нейтрального 0. В дальнейшем для моделирования «1» и «-1» из трёхмерной таблицы выбирается кусочно-линейная функция активации выхода с соответственно положительным или отрицательным наклоном на отрезке  $x \in [0; 1]$ :

$$f_{-1}(x) = \max(0, \min(1, 2x - 1)); f_0(x) = 0; f_1(x) = \max(0, (1 - 2x)) \quad (1)$$

На данном этапе для каждого из 9 парных сочетаний принадлежности A<sub>0</sub> и A<sub>1</sub> определены операции произведения, вычисляющие степень перекрытия нечётких множеств, как площадь прямоугольника (см. рис. 3) и для каждого из этих сочетаний выбрана функция активации выхода (1).



Нечёткая импликация завершается усечением линейных функций (1) по уровню  $\alpha$  равному  $\alpha$  степени перекрытия:  $\mu_{y_{cut}}(x, A_0, A_1) = \min(f(x), \mu_0(A_0) \cdot \mu_1(A_1))$  [8].

После импликации выполняется агрегирование [9] всех усечённых функций активации с разным уровнем отсечки, зависящим от степени перекрытия нечётких множеств. Агрегирование выполняется в соответствии с формулой

$$X(x, A_0, A_1) = 1 - \prod_{i=1}^9 [1 - f_{y_{cut}}^i(x, A_0, A_1)] \quad (2)$$

Если число компонентов произведения в (2) ограничить двумя, то формула при векторном значении функции  $\vec{f} = (a \ b)^T$  примет вид  $X = a + b - ab$ , что на языках программирования может быть определено бинарной операцией или функциональной зависимостью  $X = \text{probor}(a, b)$ . Эти девять операндов  $f_{y_{cut}}^1(x, A_0, A_1) \dots f_{y_{cut}}^9(x, A_0, A_1)$ , при упорядочении элементов из  $A_0 \times A_1$ , геометрически представляют собой поверхности (см. рис. 4) [10].

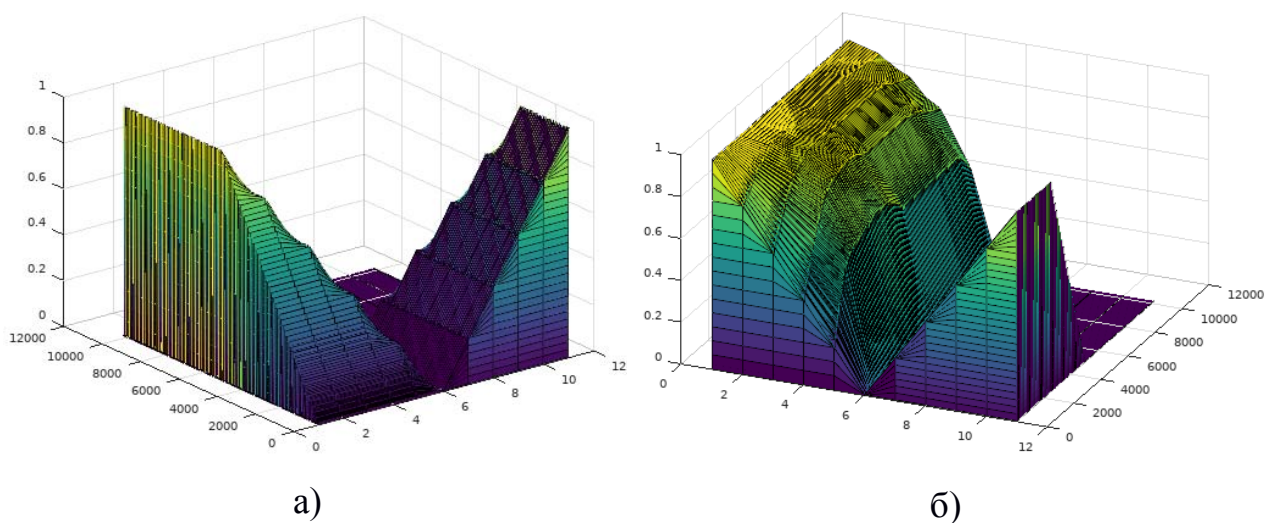


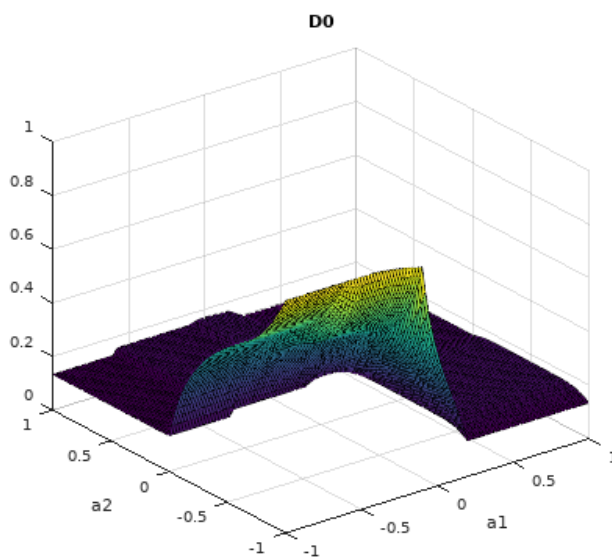
Рис. 4. – Распределение: а) принадлежности  $t \in A_0 \times A_1 \times x$  нечёткому

множеству; б) истинности логического вывода для первого выхода  $D_0$  в зависимости от  $A_0, A_1$

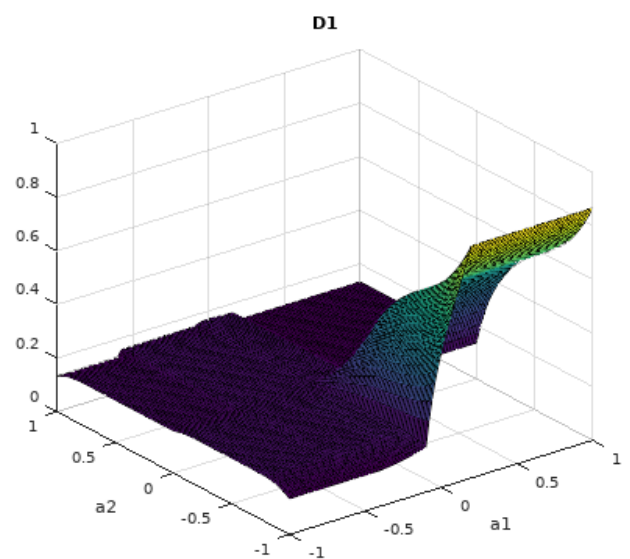
Окончательный этап информационной обработки называется дефаззификацией, она заключается в применении к агрегированной оценке истинности правил нечёткой импликации усреднения методом взвешенного среднего:

$$U_{\text{деф}} = \frac{\int x \cdot f(x) dx}{\int f(x) dx} \quad (3)$$

Выходная величина будет тем ближе к «-1», чем больше агрегированная оценка  $U_{\text{агр}}(x)$  преобладает (распределена) в левой части (правее точки  $x=0.5$ ) и тем ближе к «1» чем распределение более правое (в среднеинтегральном смысле). Таким образом данное информационное преобразование есть непрерывно-логическая функция (НЛФ, см. рис. 5) [11].



а)  $D_0(A_0, A_1)$



б)  $D_1(A_0, A_1)$



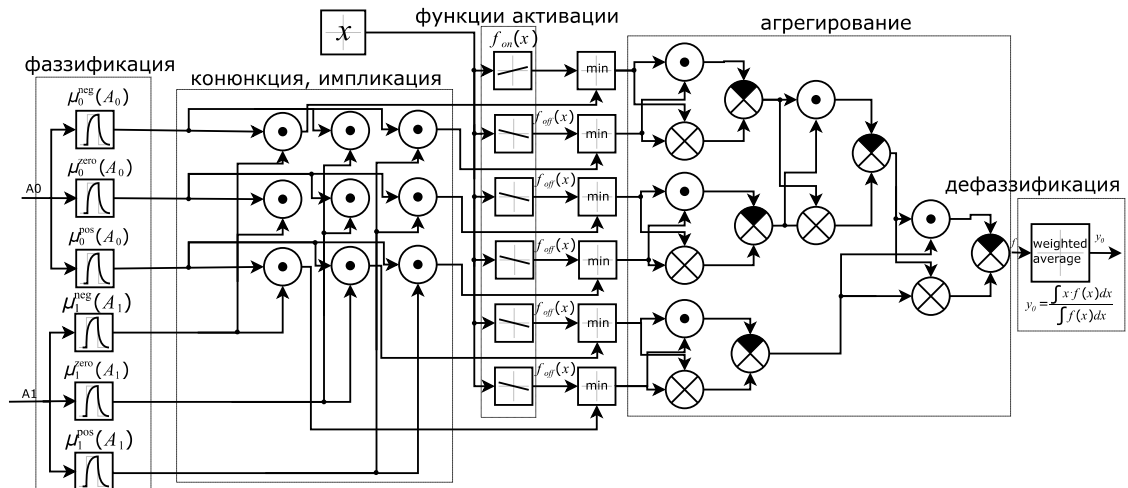


Рис. 6. – Кибернетическая схема моделирования дешифрации первого выходного канала

Проверка корректности алгоритма и лежащей в его основе математической модели (см. рис. 6) была произведена в среде свободной системы математических вычислений Octave. Сравнение вход-выходных характеристик модели дешифратора, моделируемого в Octave и инструментальным приложением FIS Toolbox пакета Matlab показала адекватность разработанного алгоритма задачам, решаемым при помощи FIS Toolbox. Две реализации описываемой модели показали качественно сравнимые результаты. Непрерывности же зависимости выхода от входа в компьютерной модели достигнуть не удалось, потому что функции принадлежности входа и выхода, при компьютерном моделировании, определены на конечных множествах. Поэтому термин "нечёткий" в теме данной статьи относится к изученным математическим моделям и к допустимой в цифровых устройствах погрешности аналого-цифрового преобразования, а не к численной реализации полученного алгоритма.

**Заключение.** Построена вычислительная модель устройства преобразования числовой информации, представляемой сигналами произвольной природы (напр. электрического тока), характеризующегося непрерывной зависимостью выхода от входа и воспроизведением работы переключательных устройств в том числе и в переходной зоне, ширина

которой определяется соглашениями о представлении цифровой двоичной информации, такими как например ТТЛ-логика.

Выявлена структура и состав математической модели цифрового преобразования расширенной переходными зонами монотонного характера. Синтезирован алгоритм вход-выходного преобразования, положенный в основу программного обеспечения, позволяющего на диаграммах наблюдать области устойчивого цифрового распознавания и моделируемые монотонные переходные области.

Программная реализация модели, позволяет сделать прогноз возможности моделирования нечётких логических систем матричными процессорами, допускающих выполнение операций поэлементного сложения, умножения, и выбора минимального и максимального элемента, а также поэлементной инверсии знака.

### **Благодарности**

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 16-01-00390; доложена на МНК САУиОИ и опубликована при финансовой поддержке РФФИ, проект №18-07-20056 Г.*

### **Литература**

1. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Введение в Octave для инженеров и математиков. М.: ALTLinux, 2012. 368 с.
2. Бирюков В.Н., Пилипенко А.М., Семерник И.В. Таблично-аналитическая модель полевого транзистора для криогенных температур // Инженерный вестник Дона, 2012, №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1402](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1402)
3. Угрюмов Е.П. Цифровая схемотехника. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 46 с.
4. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. Киев: Техника, 1967. 208 с.

- 5.Тюрин С.Ф., Городилов А.Ю., Данилова Е.Ю. Диагностирование логического элемента DCLUTFPGA // Инженерный вестник Дона, 2014, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2014/2313
- 6.Шило В.Л. Популярныe микросхемы TTL. М.: Аргус, 1993. 60 с.
- 7.Гинзбург С.А. Математическая непрерывная логика и изображение функций. М.: Энергия, 1968. 136 с.
- 8.Гинзбург С.А., Любарский Ю.Я. Функциональные преобразователи с аналогово-цифровым представлением информации. М.: Энергия, 1973. 104 с.
9. Zadeh L.A. Toward a theory of fuzzy systems. Washington, D.C.: National Aeronautics and Space Administration, 1969. 36 p.
10. Minsky M.L., Papert S.A. Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry, Expanded Edition. Cambridge, MA: MITPress, 1988. 292 p.
11. Шимбирев П.Н. Гибридные непрерывно-логические устройства. М.: Энергоатомиздат, 1990. 176 с.

### References

1. Alekseev E.R. Chesnokova O.V. Vvedenie v Octave dlyainzhenerovimatematikov [Introduction to Octave for Engineers and Mathematicians] M.: ALT Linux, 2012 368p.
  2. Biryukov V.N. Pilipenko A.M. Semernik I.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №4. URL: ivdon.ru/ru /magazine/archive/n4p2y2012/1402
  3. Ugryumov E.P. Cifrovaya skhemotekhnika [Digital circuit design]. SPb.: BHV-Peterburg, 2002. 46 p.
  4. Rvachev V.L. Geometricheskie prilozheniya algebrы logiki [Geometric Applications of Logic Algebra]. Kiev: Tekhnika, 1967. 208p.
  5. Tyurin S F Gorodilov A.YU., Danilova E.YU. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2014, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2014/2313
  6. SHilo V.L. Populyarnye mikroskhemy TTL [Popular TTL chips]. М.: Argus, 1993. 60p.
-

7. Ginzburg S.A. Matematicheskaya nepreryvnaya logika i izobrazhenie funkciy [Mathematical continuous logic and image of functions]. M.: Energiya, 1968. 136 p.
8. Ginzburg S.A. Lyubarskiy YU.YA. Funkcionalnye preobrazovateli s analogovo-cifrovym predstavleniem informacii [Functional transducers with analog-digital information presentation]. M.: Energiya, 1973. 104 p.
9. Zadeh L.A. Toward a theory of fuzzy systems. Washington, D.C.: National Aeronautics and Space Administration, 1969. 36 p.
10. Minsky M.L., Papert S.A. Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry, Expanded Edition. Cambridge, MA: MIT Press, 1988. 292 p.
11. Shimbirev P.N. Gibridnye nepreryvno-logicheskie ustrojstva [Hybrid Continuous-Logic Devices]. M.: Energoatomizdat, 1990. 176 p.