Математическая модель трансформации форм фосфора, азота и кремния в движущейся турбулентной водной среде в задачах динамики планктонных популяций

А.И. Сухинов[1], Ю.В. Белова[2]

[1]Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону
[2]Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: в данной статье построена математическая модель трансформации форм биогенных веществ, содержащих фосфор, азот и кремний, в мелководных водоемах, подобных Азовскому морю. Модель учитывает поглощение и выделение питательных веществ фитопланктоном, а также переход веществ из одной формы в другую. Проведено исследование системы уравнений, описывающих модель, для чего выполнена линеаризация системы, построен квадратичный функционал. В результате исследования получены достаточные условия единственности решения задачи, сформулирована теорема.
Ключевые слова: фитопланктон, фосфор, азот, кремний, биоген, химико-биологический источник, уравнение конвекции-диффузии-реакции, линеаризация, единственность решения системы уравнений.

В настоящее время существует потребность моделирования биогеохимических процессов в водных экосистемах с целью их предсказания. Эта проблема актуальна для Азовского моря и в особенности для Таганрогского залива, подвергающихся эвтрофикации.

В данной статье рассматривается нестационарная пространственно-трехмерная модель трансформации форм фосфора, азота и кремния и их взаимодействия с планктонной популяцией, которая достаточно полно описывает биогеохимические процессы, происходящие в мелководных водоемах, подобных Азовскому морю[1-3].

Модель основана на системе уравнений диффузии-конвекции-реакции. Каждый блок модели описывается дифференциальным уравнением в частных производных вида[4]:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}+u\frac{\partial q_i}{\partial x}+v\frac{\partial q_i}{\partial y}+w\frac{\partial q_i}{\partial z}=div\left(k\,\mathrm{grad}\,q_i\right)+R_{q_i}, \qquad (1)$$

где q_i - концентрация i-ой компоненты, u,v,w - компоненты вектора скорости водного потока, $\vec{U}=(u,v,w)$, $div(k\,\mathrm{grad}\,q_i)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_h\frac{\partial q_i}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_h\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_v\frac{\partial q_i}{\partial z}\right)$, R_{q_i} - химико-биологический источник, индекс i указывает на вид субстанции, $i\in M$, $M=\{F_1, F_2, F_3, PO_4, POP, DOP, NO_3, NO_2, NH_4, Si\}$.

Химико-биологические «источники» и «стоки» описываются следующими зависимостями[5,6]:

$$R_{F_i}=C_{F_i}(1-K_{F_iR})q_{F_i}-K_{F_iD}q_{F_i}-K_{F_iE}q_{F_i},$$

$$R_{POP}=\sum_{i=1}^{3}s_PK_{F_iD}q_{F_i}-K_{PD}q_{POP}-K_{PN}q_{POP},$$

$$R_{DOP}=\sum_{i=1}^{3}s_PK_{F_iE}q_{F_i}+K_{PD}q_{POP}-K_{DN}q_{DOP},$$

$$R_{PO_4}=\sum_{i=1}^{3}s_PC_{F_i}\left(K_{F_iR}-1\right)q_{F_i}+K_{PN}q_{POP}+K_{DN}q_{DOP},$$

$$R_{NH_4}=\sum_{i=1}^{3}s_NC_{F_i}\left(K_{F_iR}-1\right)\frac{f_N^{(2)}(NH_4)}{f_N(NO_3,NO_2,NH_4)}q_{F_i}-K_{42}q_{NH_4},$$

$$R_{NO_2}=\sum_{i=1}^{3}s_NC_{F_i}(K_{F_iR}-1)\frac{f_N^{(1)}(NO_3,NO_2)}{f_N(NO_3,NO_2,NH_4)}\cdot\frac{q_{NO_2}}{q_{NO_2}+q_{NO_3}}q_{F_i}+K_{42}q_{NH_4}-K_{23}q_{NO_2},$$

$$R_{NO_3}=\sum_{i=1}^{3}s_NC_{F_i}\left(K_{F_iR}-1\right)\frac{f_N^{(1)}\left(NO_3,NO_2\right)}{f_N\left(NO_3,NO_2,NH_4\right)}\cdot\frac{q_{NO_3}}{q_{NO_2}+q_{NO_3}}q_{F_i}+K_{23}q_{NO_2},$$

$$R_{Si}=s_{Si}K_{F_3D}q_{F_3},$$

где $i\in\{1,2,3\}$, 1 – это ChV, 2 - $AF-A$, 3 - Sc, а $ChV, AF-A, Sc$ - символические обозначения видов планктона, K_{F_iR} - удельная скорость дыхания фитопланктона; K_{F_iD} - удельная скорость отмирания фитопланктона; K_{F_iE} - удельная скорость экскреции фитопланктона; K_{PD} -

удельная скорость автолиза POP; K_{PN} - коэффициент фосфатофикации POP; K_{DN} - коэффициент фосфатофикации DOP; K_{42} - удельная скорость окисления аммония до нитритов в процессе нитрификации; K_{23} - удельная скорость окисления нитритов до нитратов в процессе нитрификации, s_P, s_N - нормировочные коэффициенты между содержанием N и P и весом во влажном состоянии [7].

Скорость роста фитопланктона определяется выражениями:

$$C_{F_{1,2}} = K_{NF_{1,2}} \, min\left\{ f_P\left(PO_4\right), f_N\left(NO_3, NO_2, NH_4\right)\right\},$$

$$C_{F_3} = K_{NF_3} \, min\left\{ f_P\left(PO_4\right), f_N\left(NO_3, NO_2, NH_4\right), f_{Si}\left(Si\right)\right\};$$

где K_{NF} - максимальная удельная скорость.

Структура взаимодействия отдельных блоков модели имеет вид:

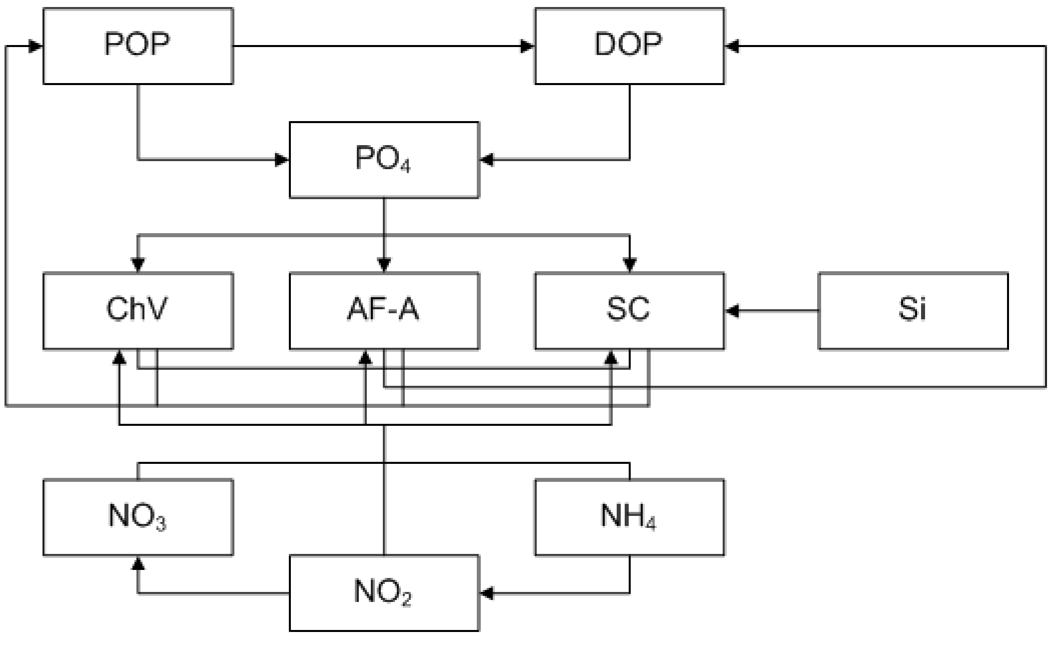

Рис. 1. - Модельная схема биогеохимической трансформации форм фосфора, азота и кремния. ChV – зеленая водоросль Chlorella vulgaris, AF-A – синезеленая водоросль Aphanizomenon flos-aquae, SC – диатомовая водоросль Sceletonema costatum, PO_4 - фосфаты, POP - взвешенный органический фосфор, DOP - растворенный органический фосфор, NH_4,- аммоний, NO_2 - нитриты, NO_3 - нитраты, Si – растворенный неорганический кремний.

Присоединим начальные условия:

$$q_i\left(x,y,z,0\right)=q_i^0\left(x,y,z\right),\quad \left(x,y,z\right)\in\overline{G},\ t=0,\ i\in M \qquad (2)$$

и граничные

$$\begin{cases} q_i=0, u_n<0 \\ \dfrac{\partial q_i}{\partial n}=0, u_n\geq 0 \end{cases} \text{ на цилиндрической боковой поверхности;} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial z}=0, \text{ на свободной поверхности водоема;} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial z}=\varepsilon_{1,i}q_i,\ \frac{\partial q_i}{\partial z}=\varepsilon_{2,i}q_i, \text{ на дне,} \qquad (5)$$

где $\varepsilon_{1,i}, \varepsilon_{2,i}$ - неотрицательные постоянные, $\varepsilon_{1,i}$, $i\in\{F_1, F_2, F_3\}$ учитывают опускание водорослей на дно и их затопление; $\varepsilon_{2,i}$, $i\in\{PO_4, POP, DOP, NO_3, NO_2, NH_4, Si\}$ учитывают поглощение питательных веществ донными отложениями.

Для получения условий существования и единственности задачи (1)-(5) проведем линеаризацию системы временной сетке $\omega_\tau=\left\{t_n=n\tau, n=0,1,\ldots,N; N\tau=T\right\}$. Члены вида R_{q_i} линеаризуются в пределах каждого временного шага, а именно, вместо уравнения (1) рассматривается цепочка уравнений вида

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}+div\left(\vec{U},q_i\right)=div\left(k\,\mathrm{grad}\,q_i\right)+R_{q_i}^n\left(q_i\right),\ t_n<t\leq t_n+\tau \qquad (6)$$

где

$$R_{F_i}^n\left(q_{F_i}\right)=C_{F_i}^n(1-K_{F_iR})q_{F_i}-K_{F_iD}q_{F_i}-K_{F_iE}q_{F_i},\ i=1,2,3,$$

$$R_{POP}^n\left(q_{POP}\right)=\sum_{i=1}^{3}s_PK_{F_iD}q_{F_i}^n-K_{PD}q_{POP}-K_{PN}q_{POP},$$

$$R_{DOP}^n\left(q_{DOP}\right)=\sum_{i=1}^{3}s_PK_{F_iE}q_{F_i}^n+K_{PD}q_{POP}^n-K_{DN}q_{DOP},$$

$$R_{PO_4}^n\left(q_{PO_4}\right)=\sum_{i=1}^{3} s_P C_{F_i}^n (K_{F_iR}-1) q_{F_i}^n + K_{PN} q_{POP}^n + K_{DN} q_{DOP}^n,$$

$$R_{NH_4}^n\left(q_{NH_4}\right)=\sum_{i=1}^{3}\frac{s_N C_{F_i}^n\left(K_{F_iR}-1\right)q_{F_i}^n}{\dfrac{\left(K_{NH_4}+q_{NH_4}^n\right)\left(q_{NO_3}^n+q_{NO_2}^n\right)\exp\left(-K_{psi}q_{NH_4}^n\right)}{K_{NO_3}+\left(q_{NO_3}^n+q_{NO_2}^n\right)}+q_{NH_4}^n}\cdot q_{NH_4}-K_{42}q_{NH_4},$$

$$R_{NO_3}^n\left(q_{NO_3}\right)=\sum_{i=1}^{3}\frac{s_N C_{F_i}^n\left(K_{F_iR}-1\right)\exp\left(-K_{psi}q_{NH_4}^n\right)q_{F_i}^n}{\left(q_{NO_3}^n+q_{NO_2}^n\right)\exp\left(-K_{psi}q_{NH_4}^n\right)+\dfrac{q_{NH_4}^n\left(K_{NO_3}+q_{NO_3}^n+q_{NO_2}^n\right)}{K_{NH_4}+q_{NH_4}^n}}\cdot q_{NO_3}+$$

$$+K_{23}q_{NO_2}^n,$$

$$R_{NO_2}^n\left(q_{NO_2}\right)=\sum_{i=1}^{3}\frac{s_N C_{F_i}^n\left(K_{F_iR}-1\right)\exp\left(-K_{psi}q_{NH_4}^n\right)q_{F_i}^n}{\left(q_{NO_3}^n+q_{NO_2}^n\right)\exp\left(-K_{psi}q_{NH_4}^n\right)+\dfrac{q_{NH_4}^n\left(K_{NO_3}+q_{NO_3}^n+q_{NO_2}^n\right)}{K_{NH_4}+q_{NH_4}^n}}\cdot q_{NO_2}+$$

$$+K_{42}q_{NH_4}^n-K_{23}q_{NO_2},$$

$$R_{Si}^n\left(q_{Si}\right)=s_{Si}K_{F_3D}q_{F_3}^n.$$

К начальным условиям (2) присоединяются следующие условия

$$q_i\left(x,y,z,t_n\right)=q_i\left(x,y,z,t_n+\tau\right)=q_i^n\left(x,y,z\right), \qquad (7)$$

где $q_i\left(x,y,z,t_n+\tau\right)$ - «финальное» решение задачи (6) для предыдущего временного интервала $t_n<t\le t_n+\tau$.

Для линеаризованной системы построим квадратичный функционал, в результате преобразований которого и будут получены искомые условия[8,9]. Имеет место теорема.

Теорема. Пусть поставлена начально-краевая задача для линеаризованной по правым частям системы уравнений (6) с дополнительными условиями: начальными (2,7) и граничными (3-5).

Пусть q_i принадлежат классу $C^2(G)\cap C^1(\overline{G})\cap C^1(0<t\le T)$, $k_h(z)$, $k_v(z) \in C^1(\overline{G})$, $R_{q_i}(x,y,z) \in C^1(\overline{G})$ и для каждого $n=\overline{0,N-1}$ выполняются неравенства

$$\frac{4k_h}{H_x^2}+\frac{4k_h}{H_y^2}+\frac{4k_v}{H_z^2}+K_{F_1D}+K_{F_1E}>K_{NF_1}\,min\left\{f_P^n(PO_4),f_N^n(NO_3,NO_2,NH_4)\right\}\left(1-K_{F_1R}\right)$$

$$\frac{4k_h}{H_x^2}+\frac{4k_h}{H_y^2}+\frac{4k_v}{H_z^2}+K_{F_2D}+K_{F_2E}>K_{NF_2}\,min\left\{f_P^n(PO_4),f_N^n(NO_3,NO_2,NH_4)\right\}\left(1-K_{F_2R}\right)$$

$$\frac{4k_h}{H_x^2}+\frac{4k_h}{H_y^2}+\frac{4k_v}{H_z^2}+K_{F_3D}+K_{F_3E}>$$

$$>K_{NF_3}\,min\left\{f_P^n(PO_4),f_N^n(NO_3,NO_2,NH_4),f_{Si}^n(Si)\right\}\left(1-K_{F_3R}\right)$$

$$\frac{4k_h}{H_x^2}+\frac{4k_h}{H_y^2}+\frac{4k_v}{H_z^2}+K_{42}>\sum_{i=1}^{3}\frac{s_N C_{F_i}^n\left(K_{F_iR}-1\right)q_{F_i}^n}{\dfrac{\left(K_{NH_4}+q_{NH_4}^n\right)\left(q_{NO_3}^n+q_{NO_2}^n\right)\exp\left(-K_{psi}q_{NH_4}^n\right)}{K_{NO_3}+\left(q_{NO_3}^n+q_{NO_2}^n\right)}+q_{NH_4}^n}$$

$$\frac{4k_h}{H_x^2}+\frac{4k_h}{H_y^2}+\frac{4k_v}{H_z^2}>\sum_{i=1}^{3}\frac{s_N C_{F_i}^n\left(K_{F_iR}-1\right)\exp\left(-K_{psi}q_{NH_4}^n\right)q_{F_i}^n}{\left(q_{NO_3}^n+q_{NO_2}^n\right)\exp\left(-K_{psi}q_{NH_4}^n\right)+\dfrac{q_{NH_4}^n\left(K_{NO_3}+q_{NO_3}^n+q_{NO_2}^n\right)}{K_{NH_4}+q_{NH_4}^n}}.$$

Тогда решение поставленной задачи существует и единственно.

Используя полученную математическую модель можно составить прогноз развития экосистемы на длительный срок и для различных значений входных параметров, разработав программный комплекс для многопроцессорной вычислительной системы[10,11].

Литература

1. Якушев Е.В., Сухинов А.И. и др. Комплексные океанологические исследования Азовского моря в 28-м рейсе научно-исследовательского судна «Акванавт» // Океанология. 2003. т. 43, №1. С. 44-53.

2. Сухинов А.И., Никитина А.В. Математическое моделирование и экспедиционные исследования качества вод в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. №8(121). С. 62-73.

3. Чистяков А.Е., Першина Ю.В. Решение задачи динамики популяций на основе модели хищник-жертва // Известия ЮФУ. Технические науки. 2013. №8. С. 142-149.

4. Першина Ю.В. Решение задачи динамики фитопланктона при наличии механизма эктокринного регулирования // Информатика, вычислительная техника и инженерное образование. 2013. №3(14). С. 45-54.

5. Yakushev E.V., Neretin L.N. One-dimensional modeling of nitrogen and sulphur cycles in the apotic zones of the Black and Arabian Seas // Global Biogeochemical Cycles. 1997. №11. pp. 401-414.

6. Ward B.B., Kilpatrick K.A. Nitrogen transformations in the oxic layer of permanent anoxic basins: the Black Sea and Cariaco Trench // Izdar E., Murray J.W. (Eds.), Black Sea Oceanography. Norwell: Springer, 1991. pp. 111-124.

7. Yakushev E.V., Pollehne F., Jost G. (Ets) Analysis of the water column oxic/anoxic interface in the Black and Baltic seas with a numerical model // Marine Chemistry. 2007. №107. pp. 388-410.

8. Сухинов А.И., Першина Ю.В. Достаточные условия единственности решения задачи динамики фитопланктона при наличии механизма эктокринного регулирования // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. №8 (97). С. 134-148.

9. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. 4-е изд. М.: Едиториал УРСС, 2009. 248 с.

10. Чистяков А.Е., Фоменко Н.А. Применение адаптивного модифицированного попеременно–треугольного итерационного метода для численной реализации двумерной математической модели движения водной

среды // Инженерный вестник Дона, 2012, №2 URL: ivdon. /ru/magazine/archive/n2y2012/794.

11. Е.Е. Дегтярева, Е.А. Проценко, А.Е. Чистяков Программная реализация трехмерной математической модели транспорта взвеси в мелководных акваториях // Инженерный вестник Дона, 2012, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1283.

References

1. Yakushev E.V., Sukhinov A.I. (Ets) Okeanologiya. 2003. t. 43, №1. pp. 44-53.

2. Sukhinov A.I., Nikitina A.V. Izvestiya UFU. Tekhnicheskiye nauki. 2011. №8(121). pp. 62-73.

3. Chistyakov A.E., Pershina Y.V. Izvestiya UFU. Tekhnicheskiye nauki. 2013. №8. pp. 142-149.

4. Pershina Y.V. Informatika, vichislitelnaya technika I inzhenernoye obrazovaniye. 2013. №3 (14). pp. 45-54.

5. Yakushev E.V., Neretin L.N. One-dimensional modeling of nitrogen and sulphur cycles in the aphotic zones of the Black and Arabian Seas. Global Biogeochemical Cycles. 1997. №11. pp. 401-414.

6. Ward B.B., Kilpatrick K.A. Nitrogen transformations in the oxic layer of permanent anoxic basins: the Black Sea and Cariaco Trench. Izdar E., Murray J.W. (Eds.), Black Sea Oceanography. Norwell: Springer, 1991. pp. 111-124.

7. Yakushev E.V., Pollehne F., Jost G. (Ets) Analysis of the water column oxic/anoxic interface in the Black and Baltic seas with a numerical model. Marine Chemistry. 2007. №107. pp. 388-410.

8. Sukhinov A.I., Pershina Y.V. Izvestiya UFU. Tekhnicheskiye nauki. 2009. №8 (97). pp. 134-148.

9. Samarskiy A.A., Vabishevich P.N. Chislenniye metodi resheniya zadach konvektsii-diffuzii [Numerical methods of solution of convection-diffusion problems]. 4-e izd. M.: Editorial URCC, 2009. 248 p.

10. Chistyakov A.E., Phomenko N.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2012. №2 URL: ivdon. /ru/magazine/archive/n2y2012/794.

11. Degtyareva E.E., Procenko E.A., Chistyakov A.E. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2012. №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1283.