Модель оптимальной эксплуатации биоресурсов с учётом административной коррупции

А. А. Чернушкин, Г. А. Угольницкий

Рассматривается модель с учётом затрат на вылов рыбы на конечном промежутке времени без учёта дисконтирования. Исследование выполнено в рамках авторской концепции устойчивого развития, изложенной в [2] и получившей дальнейшее развитие в [3] и является продолжением работ [4,5,6,7]. В качестве метода исследования выбран принцип максимума Л. С. Понтрягина [8] с обобщением [10], которое более детально изложено в [1]. Среди иностранных работ, посвящённых рассматриваемой теме, можно отметить [9].

$$J = \int_0^T \left(c_x \cdot u(t) - c_u \cdot u^2(t) - b(t)\right) \cdot x(t)dt \to \max \tag{1}$$

$$0 \le b(t) \le 1\,; 0 \le u(t) \le s_0 + (1 - s_0) \cdot \sqrt{b(t)}\,; \tag{2}$$

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) \cdot \frac{K - x(t)}{K} - u(t) \cdot x(t),\ x(0) = x_0\,. \tag{3}$$

Параметры модели (1)-(3):

c_u - Затраты на вылов единицы биомассы рыбы;

c_x - Цена единицы биомассы рыбы;

r_0 - Налоговая ставка на прибыль от рыбной ловли;

s_0 - Законодательно установленная квота на вылов рыбы (в долях);

x_0 - Начальная биомасса популяции, т;

a – Коэффициент естественного прироста, год$^{-1}$;

K – Ёмкость среды, т;

T – Период рассмотрения, лет;

$x(t)$ - Количество биомассы рыбы, т;

$u(t)$ - Промысловое усилие (доля вылова рыбы);

$b(t)$ - Доля от полученной прибыли, которая отдаётся в качестве взятки;

J - Доход рыболовецкого предприятия, у.е.

Необходимые условия принципа максимума имеют вид [1]:

$$L(x,u,b,\psi,\mu)=\left(c_x\cdot u-c_u\cdot u^2-b\right)\cdot x+\psi\cdot x\cdot\left(a\cdot\frac{K-x}{K}-u\right)+\mu\cdot\left(s_0+(1-s_0)\cdot\sqrt{b}-u\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b}=\mu\cdot\frac{1-s_0}{2\cdot\sqrt{b}}-x=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial u}=x\cdot\left(c_x-2\cdot c_u\cdot u-\psi\right)-\mu=0;$$

$$\psi'=c_u\cdot u^2-c_x\cdot u+b-\psi\cdot\left(\frac{a}{K}\cdot(K-2\cdot x)-u\right);$$

$$\psi(T)=0;$$

$$\mu\geq 0;\mu\cdot\left(s_0+(1-s_0)\cdot\sqrt{b}-u\right)=0.$$

Также, согласно [1], для того чтобы необходимые условия, приведённые выше, выполнялись, необходимо, чтобы следующий вектор был линейно независимым на всём рассматриваемом промежутке времени:

$$\left(-1,s_0+(1-s_0)\cdot\sqrt{b}-u\right).$$

Составим также матрицу Гессе и проанализируем её главный минор второго порядка:

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{\mu\cdot(1-s_0)}{4\cdot\sqrt{b^3}} & 0 \\ 0 & -2\cdot c_u\cdot x \end{vmatrix}>0.$$

Главный минор второго порядка положительный; главный минор первого порядка отрицательный, следовательно, достаточные условия лагранжиана по управляющим переменным в общем случае выполняются.

Решим задачу при конкретных значениях модельных параметров. Пусть K = 32000 т; a = 0,5 год$^{-1}$; T = 10 лет; s_0 = 0,2; x_0 = 10000 т; c_x = 0,9; r_0 = 0,2; c_u = 0,7. Вычислим величину $\tilde{x}$. Для функции $a\cdot x\cdot\frac{K-x}{K}$ величина $\tilde{x}=\frac{K}{2}$. Следовательно, для данной задачи $\tilde{x}=16000$ т.

Внутренний участок траектории $u^*(t)$.

Поскольку $x_0<\tilde{x}$, то на начальных этапах периода рассмотрения $u(t)<s_0+(1-s_0)\cdot\sqrt{b(t)}$ т.к. рыболовецкое предприятие даёт популяции

достигнуть численности, соответствующей максимальному её приросту. Следовательно, оптимальная траектория $u^*(t)$ в первые моменты времени находится внутри своей допустимой области и $\mu = 0$. Обозначим индексом 1 функциональные величины для данного случая. Тогда оптимальные выражения для управляющих переменных примут вид:

$$b_1^*(t) = 0;$$

$$u_1^*(t) = \frac{c_x - \psi_1(t)}{2 \cdot c_u}. \tag{4}$$

Система канонических уравнений с учётом (4) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \psi_1' = c_u \cdot \left(\dfrac{c_x - \psi_1(t)}{2 \cdot c_u} \right)^2 - c_x \cdot \dfrac{c_x - \psi_1(t)}{2 \cdot c_u} - \psi_1(t) \cdot \left(\dfrac{a}{K} \cdot (K - 2 \cdot x(t)) - \dfrac{c_x - \psi_1(t)}{2 \cdot c_u} \right), \\ x_1' = a \cdot x_1(t) \cdot \dfrac{K - x_1(t)}{K} - \dfrac{c_x - \psi_1(t)}{2 \cdot c_u} \cdot x_1(t). \end{cases}$$

с граничными условиями $\begin{cases} \psi(T) = 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$.

Вышеприведённая система может быть решена аналитически, однако ввиду громоздкости первого из её уравнений получение такого решения представляется затруднительным. Решим систему явно-неявным методом Эйлера. Для получения функций в виде аналитического выражения необходимо провести регрессионный анализ (так как полученные значения в узлах являются приближёнными). Получим решение

$$\begin{cases} \psi_1(t) = 0{,}83 - 0{,}06 \cdot t, R^2 = 0{,}89, \\ x_1(t) = 10302{,}4 + 2552 \cdot t - 400 \cdot t^2, R^2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, формулу (4) можно переписать в виде

$$u_1^*(t) = \frac{c_x + 0{,}06 \cdot t - 0{,}83}{2 \cdot c_u}.$$

Поскольку оптимальная траектория $u_1^*(t)$ является монотонно возрастающей, то можно вычислить момент времени τ, при котором траектория достигнет границы своей области допустимых значений: $\tau = \dfrac{2 \cdot c_u \cdot s_0 - c_x + 0{,}83}{0{,}06}$. Для данной задачи $\tau = 3{,}5$.

Граничный участок траектории $u^*(t)$**.**

Начиная с точки τ, рыболовецкое предприятие ловит рыбу в том размере, в каком позволяет квота (возможно, увеличенная за взятку). Таким образом, ограничение $u(t) = s_0 + (1 - s_0)\cdot\sqrt{b(t)}$ становится активным. Найдём

$$\mu(t) = \frac{(c_x - 2\cdot c_u \cdot s_0 - \psi_2(t))\cdot x_2(t)}{1 + c_u}.$$

Здесь индексом 2 обозначены функциональные величины в случае, когда траектория управляющей переменной u находится на границе своей области допустимых значений. Оптимальные выражения для переменных управления имеют вид

$$b_2^*(t) = \left(\frac{(c_x - 2\cdot c_u \cdot s_0 - \psi_2(t))\cdot(1 - s_0)}{2\cdot(1 + c_u)}\right)^2, \tag{5}$$

$$u_2^*(t) = \frac{c_x + 2\cdot s_0 - \psi_2(t)}{2\cdot(1 + c_u)}. \tag{6}$$

Система канонических уравнений для граничного участка оптимальной траектории $u^*(t)$ с учётом (5) и (6) имеет вид:

$$\begin{cases} \psi_2' = c_u \cdot \left(\dfrac{c_x + 2\cdot s_0 - \psi_2(t)}{2\cdot(1 + c_u)}\right)^2 - c_x \cdot \dfrac{c_x + 2\cdot s_0 - \psi_2(t)}{2\cdot(1 + c_u)} + \left(\dfrac{(c_x - 2\cdot c_u\cdot s_0 - \psi_2(t))\cdot(1 - s_0)}{2\cdot(1 + c_u)}\right)^2 - \\ -\psi_2(t)\cdot\left(\dfrac{a}{K}\cdot(K - 2\cdot x_2(t)) - \dfrac{c_x + 2\cdot s_0 - \psi_2(t)}{2\cdot(1 + c_u)}\right), \\ x_2' = a\cdot x_2(t)\cdot\dfrac{K - x_2(t)}{K} - \dfrac{c_x + 2\cdot s_0 - \psi_2(t)}{2\cdot(1 + c_u)}\cdot x_2(t). \end{cases}$$

с граничными условиями $\begin{cases} \psi(T) = 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$

Вышеприведённая система может быть решена аналитически, однако ввиду сильной громоздкости первого из её уравнений получение такого решения представляется затруднительным. Поэтому для получения ответа необходимо применить метод, использовавшийся выше при решении аналогичной системы. Получим решение

$$\begin{cases}\psi_2(t) = 0{,}84 - 0{,}06 \cdot t, R^2 = 0{,}89, \\ x_2(t) = 10168{,}996 + 2018{,}4 \cdot t - 160 \cdot t^2, R^2 = 1.\end{cases}$$

Прибыль рыболовецкого предприятия составит 23395,8 у.е.

Для формулирования мер по преодолению рассмотренного вида коррупции необходимо отметить, что возможности взяткополучателя по предоставлению квотных послаблений тем меньше, чем больше квота. Соответственно при $s_0 = 1$ возможности для послаблений отсутствуют полностью (данный факт очевиден из анализа (5)). Но в данной ситуации возникает проблема сохранения эксплуатируемой рыбной популяции. Для её решения необходимо, чтобы $\tau > T$. Это может быть достигнуто посредством особого выбора параметров c_x и c_u, т.е. установления необходимого соотношения цены единицы биомассы рыбы и затрат на вылов этой единицы. Предложение конкретного алгоритма для установления указанного соотношения – предмет дальнейших исследований.

Литература:

1. Grass D, Caulkins J. P., Feichtinger G, Tragler G, Behrens A. D. Optimal Control of Nonlinear Processes With Applications in Drugs, Corruption and Terror. – Berlin: Springer, 2008.
2. Угольницкий, Г. А. Иерархическое управление устойчивым развитием. – М.: Физматлит, 2010. – 336 с.
3. Угольницкий, Г. А. Устойчивое развитие организаций. – М.: Физматлит, 2011. – 320 с.
4. Рыбасов Е. А., Угольницкий Г. А. Математическое моделирование иерархического управления эколого-экономическими системами с учётом коррупции // Компьютерное моделирование. Экология. – Вып. 2. Под ред. Угольницкого Г. А. – М.: 2004. – С. 46-65.

5. Денин К. И, Угольницкий Г. А. Теоретико-игровая модель коррупции в системах иерархического управления // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2010. - № 1. – С.192-198.
6. Розин М. Д., Сущий С. Я., Угольницкий Г. А., Антоненко А. В. Дескриптивный подход к моделированию коррупции как фактора социальной конфликтности [Электронный ресурс]// «Инженерный вестник Дона», 2011, №3. – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2011/561 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.
7. Чернушкин, А. А. Модель оптимальной эксплуатации биоресурсов с учётом налогов и коррупции // Известия ЮФУ. Технические науки, 2012. - № 6. - с. 203-207.
8. Понтрягин Л. С, Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
9. Gruene L, Kato M, Semmler W. Solving ecological management problems using dynamic programming // Journal of Economic Behavior & Organization, 2005. – Vol. 57. – pp. 448-473.
10. Костоглотов А. А, Костоглотов А. И., Лазаренко С. В., Андрашитов Д. С. Многопараметрическая идентификация конструктивных параметров методом объединенного принципа максимума [Электронный ресурс]// «Инженерный вестник Дона», 2011, №1. – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2011/348 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.