Инженерный вестник Дона, №1 (2023)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2023/8125

О задаче управления колебаниями плоской мембраны распределенными силовыми воздействиями

Т.Н. Бобылева[1], *А.С. Шамаев*[2,3]

[1]*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва*
[2]*Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского, РАН, Москва*
[3]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва*

Аннотация: В работе рассматривается задача о приведении в покой колебаний плоской мембраны, управляемой с помощью сил, приложенных ко всей площади мембраны и ограниченных по абсолютной величине. Приводятся достаточные условия на начальные данные отклонения и скорости мембраны, при которых возможна полная остановка движения за конечное время. Проводится также оценка времени приведения в покой. Используемая в работе теорема об оценке собственных функций задачи Дирихле для уравнения Лапласа позволяет уточнить упомянутое достаточное условие по сравнению с работой Ф.Л. Черноусько, где рассмотрена аналогичная задача, и также применяется метод разложения неизвестного управления и соответствующего решения по собственным функциям задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
Ключевые слова: управление, волновое уравнение, ограниченная распределенная сила, метод Фурье, счетная система гармонических осцилляторов.

На практике мы часто встречаемся с управляемыми объектами, например, автомобилями, кораблями, самолетами, любыми технологическими процессами на производстве и т. п. У всех этих объектов есть приборы управления, с помощью которых можно влиять на движение объекта. В книге [1] представлены результаты исследований по управлению упругими колебаниями систем, описываемых одномерным волновым уравнением с линейными граничными условиями различных родов. Рассматриваются практические способы построения граничных управлений на основе решений, получаемых методом Даламбера и на основе метода Фурье. Практический интерес имеют задачи синтеза оптимальных управлений сложными техническими объектами, например, манипуляционными роботами, ракетой [2]. В работе [3] предложен метод структурно-параметрического объединения законов управления нелинейными объектами с функциональной неопределенностью по состоянию и управлению.

Часто возникает вопрос о том, как привести объект в заданное состояние, например, в состояние покоя. В [4] рассмотрена задача точного управления для системы, описываемой уравнением с интегральной памятью. Показано, что при определенных условиях эту систему можно привести в состояние покоя за конечное время распределенным управлением, ограниченным по абсолютной величине, а в частном одномерном случае - управлением, приложенным к концу отрезка. Рассмотрены различные типы ядер в интегральной части уравнения и описаны некоторые связи между задачами управляемости некоторых гиперболических и параболических систем. Теми же авторами была рассмотрена задача распределенного управления системой, описываемой волновым уравнением с памятью, для которой ядро представляет собой сумму убывающих экспоненциальных функций, а управление ограничено по модулю [5]. Доказано, что колебания системы можно привести в состояние покоя за конечное время.

Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных используются для моделирования различных приложений, в работе [6] даны новые направления для решения стохастических задач управления. В работе [7] изучается задача граничного управления смещением на левом конце стержня для процесса, описываемого телеграфным уравнением с переменным коэффициентом при неизвестной функции при условии, что правый конец свободен.

В терминах обобщенного решения волнового уравнения для механической системы с конечной энергией в [8] полностью выяснен вопрос о необходимых и достаточных условиях существования и о явном аналитическом представлении граничных управлений на двух концах струны для перехода колебательного процесса из начального состояния в заданное за произвольный промежуток времени. Граничное управление неоднородной струной рассмотрено в [9].

Задача нашей работы - привести систему, которая описывается классическим волновым уравнением, в состояние полного покоя за конечное время с помощью нагрузок (сил), распределенных по всей области, где задан процесс колебаний, и оценить это время через параметры задачи. Для решения этой задачи мы воспользуемся методом Фурье. Именно, будем искать как управление, так и соответствующее ему решение задачи о колебаниях мембраны в виде ряда Фурье по собственным функциям (в одномерном случае, как хорошо известно, это тригонометрическая система функций) с коэффициентами, зависящими от времени. Для этих, зависящих от времени коэффициентов, нетрудно получить задачу об остановке счетного количества колебательных систем, подобным маятниковым, которые управляются внешними силами. Сами маятниковые системы независимы, только управляющие силы в сумме должны удовлетворять ограничениям на их абсолютную величину. Далее мы должны предложить такое управление маятниковой системой, чтобы оно приводило в покой каждое колебательное звено, а время остановки было бы общим для всех звеньев. Для колебательного звена без трения хорошо известен оптимальный закон управления, и даны оценки времени успокоения через параметры задачи [10]. В настоящей работе мы, опираясь на результаты указанной работы [10], оценим гладкость начальных условий для колебаний, которые мы должны погасить. Здесь большое значение играет оценка собственных функций оператора Лапласа, нормированных в среднеквадратичной норме по абсолютной величине.

Постановка задачи и ее решение.

В книге [10] изложен результат об управлении упругими системами с распределенными параметрами, который мы приведем в данной работе в частном случае для волнового уравнения. Рассмотрим задачу управления системой, описываемой волновым уравнением, с помощью распределенных по всей области Ω, ограниченных по модулю силовых воздействий.

Введем сначала систему собственных функций и собственных значений $\{\varphi_k(x)\},\{\omega_k^2\}$ оператора Лапласа с краевыми условиями Дирихле в области Ω.

$$\begin{cases} \Delta\varphi_k(x) + \omega_k^2\varphi_k(x) = 0 \text{ в } \Omega, \\ \varphi_k(x)_{|\partial\Omega} = 0, \ \|\varphi_k(x)\|_{L_2} = 1, k = 1, 2, \ldots \end{cases} \quad (1)$$

Согласно хорошо известным классическим результатам система $\{\varphi_k(x)\}$ образует ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$. Введем последовательность $m_k : m_k = \sup_{x\in\Omega} |\varphi_k(x)|, k = 1, 2, \ldots$. Необходимо заметить, что данная последовательность $\{m_k\}$ не обязательна ограничена.

Теперь рассмотрим задачу управления системой, описываемой волновым уравнением:

$$\begin{cases} \ddot{u} = \Delta u + f(t,x) \text{ в } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \\ u_{|t=0} = u_0(x), \\ \dot{u}_{|t=0} = u'(x). \end{cases} \quad (2)$$

Управляющая функция $f(t,x)$ в (2) удовлетворяет оценке $|f(t,x)| < \varepsilon$, где ε - малая положительная постоянная.

Цель управления – остановить полностью колебания системы за конечное время $T > 0$.

Пусть q_k и $q_k^{(1)}$ – коэффициенты ряда Фурье в разложении функций $u(x)$ и $u'(x)$ по ортонормированному базису $\{\varphi_k(x)\}$ в области Ω в $L_2(\Omega)$, тогда, положим:

$$\rho_k = [\omega_k^2 q_k^2 + (q_k^{(1)})^2]^{1/2}. \qquad (3)$$

В монографии [10] получена следующая оценка для времени успокоения колебаний системы, основанная на декомпозиции системы на счетную систему маятников и последующем применении принципа максимума Л.С. Понтрягина:

$$T \le \pi\left[\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}Q^*\right], \text{ где } Q^* = \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k m_k. \qquad (4)$$

Очевидно, график зависимости T от ε представляет собой гиперболу. (Рис.1).

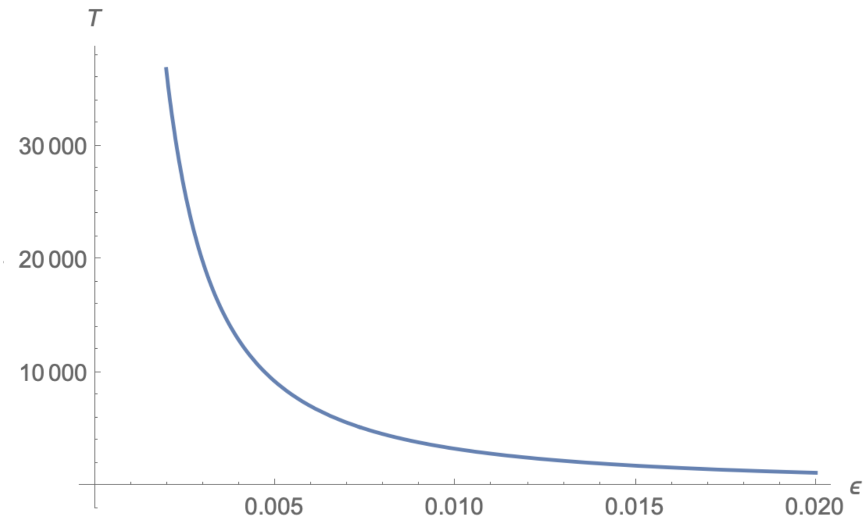

Рис. 1. – График зависимости от ε времени T, за которое можно остановить систему.

Достаточные условия на гладкость начальных условий.

Для построения управления в исходной задаче необходимо найти условия на начальные функции $u_0(x), u'(x)$, при которых сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k m_k$. Для оценки величин m_k воспользуемся результатами работы [11]. Согласно этой работе нормированные в пространстве $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи Дирихле удовлетворяют оценке:

$$\max_{\Omega} |u_k(x)| \le C\omega_k^{d-1}\ln\omega_k. \qquad (5)$$

Кроме того, воспользуемся далее классической оценкой Куранта-Вейля, согласно которой для операторов второго порядка $\omega_k \sim k^{\frac{1}{d}}$, где d – размерность пространства [12].

Еще нам потребуется следующее утверждение [12] о коэффициентах Фурье при разложении произвольной функции $u(x)$ в пространстве $H_d^s(\Omega)$: $|q_k| \le ck^{-\frac{s}{d}}$ $(k=1,2,\ldots)$, которое следует из определения принадлежности функции $u(x)$ пространству $H_d^s(\Omega)$ через ее коэффициенты Фурье при разложении по собственным функциям оператора Лапласа с краевым условием Дирихле. Принадлежность к этому пространству предполагает гладкость по Соболеву порядка s и еще дополнительные краевые условия в виде обращения в нуль функции и степеней оператора Лапласа на границе области до степени, равной целой части от $0.5(s-1)$ включительно. Для случая $d=2$ обе функции, определяющие начальные условия, должны обращаться в нуль на границе области, а оператор Лапласа должен обращаться в нуль на границе только для первой из них.

Простые вычисления показывают, что если $u(x)\in H_d^s(\Omega), u'(x)\in H_d^r(\Omega)$, то следующие ряды:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k q_k(\omega_k^{\alpha-1}\ln\omega_k)^{\frac{1}{2}},\quad \sum_{k=1}^{\infty}q_k^{(1)}(\omega_k^{d-1}\ln\omega_k)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

сходятся при условиях:

$$s>\frac{3d+1}{2},\quad r>\frac{3d-1}{2}. \tag{7}$$

Таким образом, при $u(x)\in H_d^s(\Omega), u'(x)\in H_d^r(\Omega)$, где s и r положительные числа, удовлетворяющие неравенствам (7), задача управления разрешима.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k m_k$ сходится, и имеет смысл оценка времени успокоения упругой системы (4).

Пусть теперь область Ω представляет собой либо интервал при $d=1$, либо квадрат при $d=2$, либо куб при $d=3$. В этом случае условие на сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k m_k$ принимает простой вид: $\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k' q_k<\infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty}q_k'<\infty$.

При $u(x)\in H^s(\Omega), u'(x)\in H^r(\Omega)$ условия $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{-\frac{1}{\alpha}}k^{\frac{s}{d}}}<\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{r}{\alpha}}}<\infty$ являются достаточными условиями сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k m_k$, откуда $s>d+1, r>d$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Задача управления:

$$\begin{cases} \ddot{u}=\Delta u+f(t,x) \text{ в } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega}=0, \\ u_{|t=0}=u_0(x)\in H_d^s(\Omega),\, s>\dfrac{3d+1}{2}, \\ \dot{u}_{|t=0}=u'(x)\in H_d^r(\Omega),\, r>\dfrac{3d-1}{2}. \end{cases} \tag{8}$$

имеет решение, если управляющая функция $f(t,x)$ непрерывна и $|f(t,x)|<\varepsilon$. Кроме того, выбор $f(t,x)$ осуществляется так, чтобы для некоторого $T>0$ $u(x,t)\equiv 0$ при $t\geq 0$, и $f(x,t)\equiv 0$ при $t\geq T$. При этом время $T>0$ «успокоения» колебаний системы удовлетворяет неравенству:

$T\leq\pi\left[\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k m_k\right]$, где величины $\rho_k m_k$ определены выше.

Если область Ω является интервалом $\Omega=(0,\pi)$, квадратом $\Omega=(0,\pi)\times(0,\pi)$ или кубом $\Omega=(0,\pi)\times(0,\pi)\times(0,\pi)$ соответственно для $d=1,2,3$, то задача управления разрешима при $u_0(x)\in H_d^s(\Omega), s>d+1, u'(x)\in H_d^r(\Omega), r>d$,
а оценка времени T приведения системы в покой удовлетворяет неравенству:

$$T\le\pi\left[\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k\right].$$

Задача управления колебаниями, которые описываются волновым уравнением в ограниченной области Ω являются классической задачей управления, которая рассматривается во множестве работ, см., например, обзорную работу [13]. В этой работе рассматриваются, в основном, управления, приложенные к границе области.

Выводы.

В настоящей работе получено уточнение результатов о гладкости начальных условий, достаточных для применения метода для успокоения колебаний системы, описываемой волновым уравнением [10]. Этот результат основан на теореме об оценке модулей собственных функций оператора Лапласа задачи Дирихле в ограниченной области [11].

Литература

1. Знаменская, Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176 с.

2. Андрашитов Д.С., Костоглотов А.А., Костоглотов А.И., Лазаренко С.В., Ценных Б.М. Универсальный метод синтеза оптимальных управлений нелинейными лагранжевыми динамическими системами // Инженерный вестник Дона. 2014. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/nly2014/2251

3. Елсуков В.С., Лачин В.И., Демидов О.Ю. Управление ограниченно неопределенными по состоянию и управлению нелинейными объектами //

Инженерный вестник Дона. 2018. №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5080

4. Romanov I.V., Shamaev A.S. Some problems of distributed and boundary control for systems with integral aftereffect // Journal of Mathematical Sciences. 2018. V. 234. № 4. pp. 470–484. URL: link.springer.com/article/10.1007/s10958-018-4023-6

5. Romanov I.V., Shamaev A.S. Exact Control of a Distributed System Described by the Wave Equation with Integral Memory // Journal of Mathematical Sciences. 2018. V. 262. pp. 358-373. URL: link.springer.com/content/pdf/10.1007/s10958-022-05821-z.pdf?pdf=button

6. Boutselisa G.I., Pereirab M., A., Evansa E. N., Theodoroua E. A. Variational Optimization for Distributed and Boundary Control of Stochastic Fields // 2019, arXiv preprint arXiv:1904.02274v1. URL: arxiv.org/pdf/1904.02274v1.pdf

7. Крицков Л.В., Абдукаримов М.Ф. Граничное управление смещением на одном конце при свободном втором для процесса, описываемого телеграфным уравнением с переменным коэффициентом // Докл. РАН. 2013. Т. 450. № 6. С. 640–643. DOI: 10.7868/S0869565213180060

8. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1659–1675. URL: mathnet.ru/links/05cfb4edccc5cf786aacf03c3a26546d/de10266.pdf

9. Боровских А.В. Формулы граничного управления неоднородной струной I // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 1. С. 69-95.

10. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.

11. Эйдус Д. М. Некоторые неравенства для собственных функций // ДАН СССР. 1956. №107. № 6. С. 796-798.

12. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М: Наука, 1976. 391 с.

13. Lions J. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Review. 1988 .V 30. № 1. pp. 1–68. URL: epubs.siam.org/doi/10.1137/1030001

References

1. Znamenskaya L.N. Upravleniye uprugimi kolebaniyami. [Control of elastic vibrations]. M.: Fizmatlit, 2004. 176 p.

2. Andrashitov D.S., Kostoglotov A.A., Kostoglotov A.I., Lazarenko S.V., Tsennykh B.M. Inzhenernyj vestnik Dona. 2014. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/nly2014/2251

3. Elsukov V.S., Lachin V.I., Demidov O.Yu. Inzhenernyj vestnik Dona, 2018. №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5080

4. Romanov I.V., Shamaev A.S. Journal of Mathematical Sciences. 2018. V. 234. № 4. pp. 470–484. URL: link.springer.com/article/10.1007/s10958-018-4023-6

5. Romanov I.V., Shamaev A.S. Journal of Mathematical Sciences. 2018. V. 262. pp. 358-373. URL: link.springer.com/content/pdf/10.1007/s10958-022-05821-z.pdf?pdf=button

6. Boutselisa G.I., Pereirab M., A., Evansa E. N., Theodoroua E. A. 2019, arXiv preprint arXiv:1904.02274v1. URL: arxiv.org/pdf/1904.02274v1.pdf .

7. Kritskov L.V., Abdukarimov M.F. Doklady Mathematics. 2013. V. 87. № 3. pp. 351-353. DOI: 10.7868/S0869565213180060

8. Ilyin V.A. Differential Equations, 2000. V. 36. № 11. pp. 1659–1675. URL: link.springer.com/article/10.1007/BF02757368

9. Borovskikh A.V. Differential Equations. 2007. V. 43. № 1. pp. 69-95.

10. Chernous'ko F.L., Ananyevsky I.M., Reshmin S.A. Metody upravleniya nelineynymi mekhanicheskimi sistemami. [Control methods for nonlinear mechanical systems]. M.: Fizmatlit, 2006. 328 p.

11. Eidus D.M. DAN USSR. 1956. V. 107. № 6. pp. 796-798.

12. Mikhailov V.P. Partial Differential Equations. M: Mir, 1978. 391 p.

13. Lions J. SIAM Review. 1988. V 30. № 1. pp. 1–68. URL: epubs.siam.org/doi/10.1137/1030001