Применение метода Галёркина при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести

М. Ю. Козельская, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов

Задачи расчета на устойчивость сжатых стержней с учетом физической нелинейности материала рассматриваются в работах [1-10]. Как правило, решение этих задач сводится к линейному неоднородному дифференциальному уравнению второго или четвертого порядка относительно прогиба. В случае шарнирного опирания стержня разрешающее уравнение имеет вид [5]:

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{F\cdot v}{EI}+\frac{M_0}{EI}-\frac{1}{I}\int_A \varepsilon^* y dA=0. \qquad (1)$$

Решать данное уравнение в работе [5] предлагается методом конечных разностей. Однако этот метод не очень удобен, если стержень имеет переменную по длине геометрию сечения, особенно в том случае, когда жесткость стержня изменяется дискретно.

Рассмотрим решение уравнения (1) методом Галёркина. Сущность этого метода заключается в том, что сначала задаются базисными функциями, которые должны удовлетворять граничным условиям, затем в исходное уравнение подставляют приближенное решение и вычисляют его невязку. Далее выдвигается требование ортогональности невязки к базисным функциям.

Широко используется метод Галёркина в сочетании с методом конечных элементов, то есть когда в качестве базисных функций применяются функции формы.

Для линейного конечного элемента прогиб в произвольной точке выражается через узловые перемещения V_i, V_j в виде:

$$v(x)=N_i\cdot V_i+N_j\cdot V_j=\begin{bmatrix}N_i & N_j\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}V_i\\ V_j\end{Bmatrix}=[N]\cdot\{V\}, \qquad (2)$$

где $[N_i \quad N_j] = [1 - \frac{x}{L}, \frac{x}{L}]$.

Продифференцировав выражение (2) по x, получим:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d[N]}{dx} \cdot \{V\} = [-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}] \cdot \{V\}.$$

Применение метода Галёркина к уравнению (1) приводит к условию:

$$\int_0^l [N]^T (\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{F \cdot v}{EI} + \frac{M_0}{EI} - \frac{1}{I}\int_A \varepsilon^* y dA) dx = 0. \quad (3)$$

Интеграл по длине стержня можно разбить на сумму интегралов по длине каждого элемента:

$$\begin{aligned} &\int_0^l [N]^T (\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{F \cdot v}{EI} + \frac{M_0}{EI} - \frac{1}{I}\int_A \varepsilon^* y dA) dx = \\ &= \sum_{e=1}^{m} \int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T (\frac{d^2 v^{(e)}}{dx^2} + \frac{F \cdot v^{(e)}}{EI} + \frac{M_0^{(e)}}{EI} - \frac{1}{I}\int_{A^{(e)}} \varepsilon^* y dA) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы понизить порядок производной в интеграле $\int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \frac{d^2 v^{(e)}}{dx^2} dx$, применим интегрирование по частям:

$$\int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \frac{d^2 v^{(e)}}{dx^2} dx = [N^{(e)}]^T \frac{dv^{(e)}}{dx}\Bigg|_0^{L^{(e)}} - \int_{L^{(e)}} \frac{d[N^{(e)}]^T}{dx} \frac{dv}{dx} dx = -\frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \{V\}.$$

Рассмотрим остальные слагаемые, входящие в выражение (4):

$$\int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \frac{F \cdot v^{(e)}}{EI} dx = \frac{F}{EI} \int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dx \cdot \{V\} = \frac{F \cdot L^{(e)}}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \{V\};$$

$$\int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T (\frac{1}{I} \int_{A^{(e)}} \varepsilon^* y dA) dx = \frac{L^{(e)}}{2I} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \int_{A^{(e)}} \varepsilon^* y dA.$$

В случае, когда сила F приложена с эксцентриситетом e, момент $M_0 = Fe$.

$$\int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T (\frac{M_0^{(e)}}{EI}) dx = \frac{F \cdot e \cdot L^{(e)}}{2EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Если стержень имеет начальное искривление $v_0(x) = f_0 \sin(\frac{\pi x}{l})$, то $M_0 = Fv_0$.

$$\int\limits_{L^{(e)}} \left[N^{(e)}\right]^T \left(\frac{M_0^{(e)}}{EI}\right)dx = \frac{F \cdot f_0}{EI} \cdot \int\limits_0^{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x}{L^{(e)}} \\ \dfrac{x}{L^{(e)}} \end{bmatrix} \sin\frac{\pi(x + X_i)}{l} dx =$$

$$= \frac{F \cdot f_0}{EI} \cdot \frac{l}{\pi} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{l}{\pi \cdot L^{(e)}} \cdot (\sin\dfrac{\pi X_i}{l} - \sin\dfrac{\pi X_j}{l}) + \cos\dfrac{\pi X_j}{l} \\ \dfrac{l}{\pi \cdot L^{(e)}} \cdot (\sin\dfrac{\pi X_j}{l} - \sin\dfrac{\pi X_i}{l}) - \cos\dfrac{\pi X_j}{l} \end{bmatrix}.$$

Окончательно условие (3) можно записать в виде: $K \cdot \{V\} = P$, где $K = \sum\limits_{e=1}^{m} K^{(e)}$ – матрица жесткости всего стержня, получаемая суммированием локальных матриц жесткости элементов.

$$K^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{F \cdot L^{(e)}}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Вектор нагрузки:

$P^{(e)} = \dfrac{F \cdot e \cdot L^{(e)}}{2EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{L^{(e)}}{2I} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \int\limits_{A^{(e)}} \varepsilon^* y dA$ – для случая приложения силы с эксцентриситетом.

$$P^{(e)} = \frac{F \cdot f_0}{EI} \cdot \frac{l}{\pi} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{l}{\pi \cdot L^{(e)}} \cdot (\sin\dfrac{\pi X_i}{l} - \sin\dfrac{\pi X_j}{l}) + \cos\dfrac{\pi X_j}{l} \\ \dfrac{l}{\pi \cdot L^{(e)}} \cdot (\sin\dfrac{\pi X_j}{l} - \sin\dfrac{\pi X_i}{l}) - \cos\dfrac{\pi X_j}{l} \end{bmatrix} - \frac{L^{(e)}}{2I} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \int\limits_{A^{(e)}} \varepsilon^* y dA$$

– если стержень имеет начальный прогиб.

Для сравнения результатов расчета по методу Галеркина с решениями других авторов будем использовать уравнение связи Максвелла-Гуревича. Данное уравнение применяется в работах[1-5, 7,8]. Оно имеет вид $\dfrac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = \dfrac{f^*}{\eta^*}$,

где f^* - функция напряжений, η^* - коэффициент релаксационной вязкости.

$$f^* = \sigma - E_\infty \varepsilon^*, \quad \frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0^*} e^{\left|\frac{f^*}{m^*}\right|}.$$

Здесь η_0^*– коэффициент начальной релаксационной вязкости; E_∞ – модуль высокоэластичности; m^* – модуль скорости.

Вычисления выполнялись для полимерного стержня прямоугольного сечения размерами b=15мм и h=8мм, материал ЭДТ-10. При расчетах использовались следующие значения: l=157 мм, F=68кг, E=295 кг/мм^2, E_∞=315 кг/мм^2, m^*=0.35 кг/мм^2, η_0=10^9 кг·с/мм^2, e=0,16мм. Сравнение результатов расчета с работами И. И. Кулинича [5] и академика В. И. Андреева [4] для случая, когда $M_0 = F \cdot e$, представлено в табл.1.

Таблица №1

Сравнение результатов расчета различных авторов

y, мм	t=54 мин			t=108 мин			t=162 мин		
	σ_1, МПа	σ_2, МПа	σ_3, МПа	σ_1, МПа	σ_2, МПа	σ_3, МПа	σ_1, МПа	σ_2, МПа	σ_3, МПа
-4	16,000	16,002	15,984	19,310	19,800	19,292	34,435	31,632	32,612
-2	11,152	11,147	11,143	13,305	13,586	13,293	22,893	21,134	21,733
0	5,780	5,780	5,780	5,982	6,010	5,982	6,692	6,680	6,672
2	0,270	0,274	0,278	-1,947	-2,001	-1,733	-9,396	-9,189	-9,906
4	-5,254	-5,247	-5,237	-9,860	-10,00	-9,436	-23,88	-23,80	-24,97

где σ_1 – результат, полученный И. И. Кулиничем; σ_2 – результат, полученный академиком РААСН, проф. В. И. Андреевым; σ_3 – результат, полученный авторами. За σ здесь обозначены напряжения в середине пролета.

Для сравнения был проведен расчет ступенчатого стержня той же массы, состоящего из 5 участков. График изменения ширины сечения b показан на рис. 1.

На рис. 2 и 3 показаны соответственно графики роста стрелы прогиба для стержней постоянного и переменного сечения. Как видно из графиков,

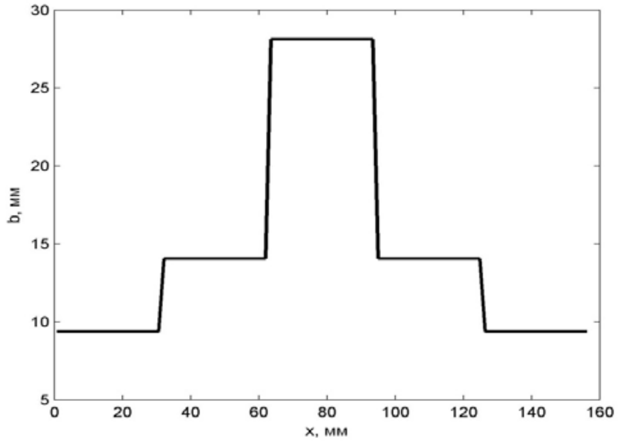

Рис.1. - График изменения ширины сечения b

критическое время для стержней переменной жесткости при той же массе больше почти в 4.5 раза, что свидетельствует об экономической эффективности их применения.

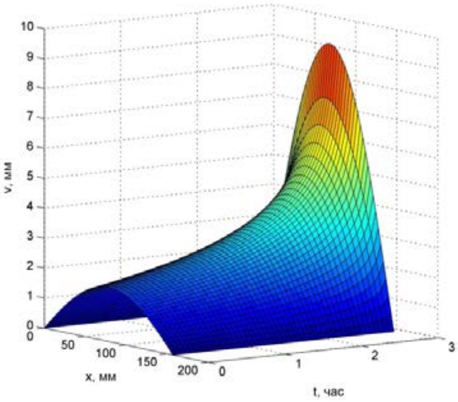

Рис. 2.- График изменения стрелы прогиба для стержня постоянного сечения

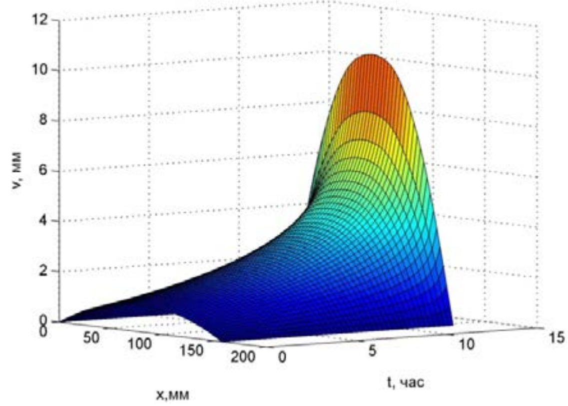

Рис. 3. - График изменения стрелы прогиба для стержня переменного сечения

Литература

1. Литвинов С.В., Клименко Е.С., Кулинич И.И., Языева С.Б., Торлина Е.А. Расчет на устойчивость стержней из ЭДТ-10 при различных вариантах закрепления [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2011, №2. – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2011/415 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

2. Литвинов С.В., Клименко Е.С., Кулинич И.И., Языева С.Б. Расчет на устойчивость полимерных стержней с учетом деформаций ползучести и начальных несовершенств [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2011, №2. – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2011/418 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

3. Литвинов С.В., Языев Б.М., Бескопыльный А.Н., Ананьев И.В. Расчет на устойчивость стержней из ЭДТ-10 при начальной погиби стержня в виде S-образной кривой [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №1. – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/723 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

4. Андреев В.И. Устойчивость полимерных стержней при ползучести: дис. канд. техн. наук. – М., 1967.

5. Кулинич И.И. Устойчивость продольно-сжатых стержней переменной жесткости при ползучести: дис. канд. техн. наук. – Ростов-на-Дону, 2012.

6. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1975.

7. Языев С.Б. Устойчивость стержней при ползучести с учетом начальных несовершенств: дис. канд. техн. наук. – Ростов-н/Д, 2010.

8. Языев Б.М., Андреев В.И. Выпучивание продольно-сжатых стержней переменной жесткости при ползучести.[Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №4.– Режим доступа http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1259 (доступ свободный) – Загл . с экрана. – Яз. рус.

9. Egorov Y.V. On the Lagrange problem about the strongest colonn // Rapport Interne 02-16. Universite Paul Sabatier, Toulouse. 2002. — С. 1-7.

10. Bleich H.H. Nonlinear creep deformations of columns of rechtangular cross section // Iourn. of Appl. Mech. Dec. 1959