**Исследование устойчивости неоднородных полимерных стержней в условиях термовязкоупругости**

**И.И. Кулинич, В.В. Литвинов, С.Б. Языев**
Ростовский государственный строительный университет, г. Ростов-на-Дону

Полимерные материалы обладают многими положительными качествами: кислото- и щёлочестойкость, высокая прочность на разрыв (у некоторых разновидностей полиметилметакрилата достигает 2000 МПа) и т.д. Однако полимерным материалам, как говорилось выше, присуще сильное проявление реологических свойств. Ситуацию усугубляет то, что все упругие и высокоэластические параметры полимеров очень сильно меняются в зависимости от температуры. Так, при нагреве образца из ПММА от $20°\mathrm{C}$ до $40°\mathrm{C}$ значение модуля начальной релаксационной вязкости $\eta_0^*$ уменьшается практически в два раза.

Таким образом, даже небольшой перепад температур в образце способен создать значительную косвенную неоднородность, которая самым неблагоприятным образом способна сказаться на работе конструкции.

***Вывод основных разрешающих уравнений***

При выводе основных уравнений предполагается, что на образец не действует температурное поле или температурное поле постоянно по оси стержня остаётся неизменным, т.е. $E(x) = \mathrm{const}$. Однако значения физико-механических параметров материала имеют сильную зависимость от температуры, а следовательно, от координаты $x$, к примеру для модуля упругости:

$$E = f\big(T(x)\big).$$

В работе[1]рассматривается жёстко закреплённый с обоих концов стержень под действием температурной нагрузки. Однако он не учитывает возможность приложения механической нагрузки.

Использованные в расчетах значения релаксационных констант, их зависимости от температуры для эпоксидной композиции ЭДТ-10 и полиметилметакрилата (ПММА) для «старшего» составляющего спектра приводятся в работе[2]:

При выводе разрешающих уравнений основные интегральные соотношения не меняются:

$$F = b\int_{-h/2}^{h/2} \sigma dy, \qquad (1)$$

$$M_0 + Fv = -b\int_{-h/2}^{h/2} \sigma y dy. \qquad (2$$

В случае выполнения гипотезы плоских сечений запишется и выражение полных деформаций:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \chi y. \qquad (3)$$

С другой стороны, с учетом температурных деформаций, можно записать:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma + \varepsilon_T + \varepsilon^*, \qquad (4)$$

где $\varepsilon_T = \alpha\Delta T$ – температурные деформации.

С учетом (3) и (4) можно записать

$$\sigma = E(\varepsilon_0 - \chi y - \varepsilon_T - \varepsilon^*). \qquad (5)$$

Подставляя выражение (5) в (1) и проведя интегрирование, определяют осевые деформации стержня:

$$\varepsilon_0 = \frac{F}{Ebh} + \alpha\Delta T + \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* dy. \qquad (6)$$

Аналогичным образом после подстановки выражения (5) в (2):

$$M_0 + Fv = E\chi I + bE\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy, \qquad (7)$$

где $I = \frac{bh^3}{12}$ – осевой момент инерции стержня относительно оси $z$.

С учетом того, что $\chi \approx -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, окончательное разрешающее уравнение для оси стержня принимает вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{F}{EI} v = -\frac{M_0}{EI} + \frac{b}{I}\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy. \qquad (8)$$

Для удовлетворения произвольных граничных условий производится дважды дифференцирование выражения по $x$. Однако теперь $E(x) \neq \text{const}$:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{F}{I}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{v}{E}\right) = -\frac{F}{I}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{v_0}{E}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{b}{I}\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy\right). \qquad (9)$$

Вводится обозначение: пусть $\zeta = \frac{b}{I}\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy$, тогда выражение (9) принимает вид:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{F}{I}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{v}{E}\right) = -\frac{F}{I}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{v_0}{E}\right) + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \qquad (10)$$

Таким образом, основное разрешающее уравнение представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами.

***Методика и алгоритм решения нелинейных уравнений, численная реализация***

Пусть на исследуемый стержень действует некоторый тепловой поток. В задачи диссертационной работы не входит определение температурного поля. Поэтому предполагается, что температура распределяется по длине стержня по следующему закону:

$$T(x) = T_0 + k_0 x t, \qquad (11)$$

где $k_0$ – скорость роста температуры, $\frac{\text{град}}{\text{мм·ч}}$.

Таким образом, на первом этапе вычисляем распределение температурного поля по оси стержня $x$. На следующем этапе – распределение физико-механических и релаксационных параметров по оси стержня в зависимости от температурного поля. На третьем – определяется напряженно-деформированное состояние полимерного стержня. Пусть стержень обладает некоторой начальной погибью

$$v_0 = f_0 \sin^2 \frac{\pi x}{l}, \qquad (12)$$

где $f_0$ – стрела начального погиба стержня; $l$ – длина стержня.

Если считать нагружение мгновенным, то в момент времени $t = 0$ будут справедливы начальные условия $\varepsilon_0^* = 0$. Таким образом, на нулевом этапе приходим к упругой задаче.

Граничные условия описываются соотношениями:

$$v(0) = 0; \quad \varphi(0) = \frac{\partial v(0)}{\partial x} = 0; \qquad (13)$$

$$v(l) = 0; \quad \varphi(l) = \frac{\partial v(l)}{\partial x} = 0,$$

где $v(x)$ – погибь исследуемого стержня; $\varphi(x)$ – углы поворота нормального к продольной оси стержня сечения.

Вводя обозначение $v = u$ и обозначив штрихом дифференцирование по $x$, полученную краевую задачу можно сформулировать следующим образом:

$$u^{IV} + p\left(\frac{u}{E}\right)'' = f; \tag{14}$$

$$u(0) = 0; \quad \varphi(0) = \frac{\partial u(0)}{\partial x} = 0; \quad u(l) = 0; \quad \varphi(l) = \frac{\partial u(l)}{\partial x} = 0, \tag{15}$$

где

$$p = \frac{F}{I}, \quad f = -p\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{v_0}{E}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{b}{I}\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy\right).$$

Вводим на интервалах интегрирования равномерные сетки

$$\omega_{hx} = \left\{x_i = ih_x; \quad h_x = \frac{l}{N_x}; \quad i = 0,1,\dots,N_x\right\};$$

$$\omega_{hy} = \left\{y_j = jh_y; \quad h_y = \frac{h}{N_y}; \quad j = 0,1,\dots,N_y\right\}.$$

Краевым задачам можно поставить в соответствие схему четвертого порядка аппроксимации

$$u_{\bar{r}\bar{r}rr} + p_i\left(\frac{u}{E}\right)_{\bar{r}r} = f_i, \tag{16}$$

Где

$$u_{\bar{r}\bar{r}rr} = \frac{1}{h_x^4}(u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}) + 0(h_x)^4,$$

$$u_{\bar{r}r} = \frac{1}{h_x^2}\left[\left(\frac{u}{E}\right)_{i-1} - 2\left(\frac{u}{E}\right)_i + \left(\frac{u}{E}\right)_{i+1}\right] + 0(h_x)^2.$$

Граничные условия (13) в точках $x = 0$ и $x = l$ аппроксимируются следующим образом (рис.1):

$$u_0 = 0; \quad \varphi_0 \to u_{-1} = u_1; \tag{17}$$

$$u_{Nx} = 0; \quad \varphi_{Nx} \to u_{Nx-1} = u_{Nx+1}.$$

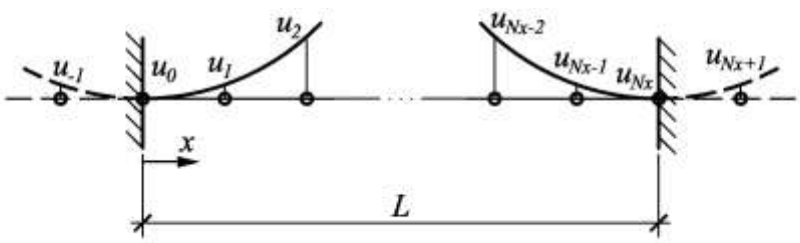


Рис. 1. Аппроксимация граничных условий задачи при варианте закрепления «защемление-защемление»

Полученную разностную схему можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$AY = F, \tag{18}$$

где

$$Y = \{u_0, u_1, u_2 \dots u_i \dots u_{Nx-2}, u_{Nx-1}, u_{Nx}\}^T;$$

$$f = \{0, f_1, f_2 \dots f_i \dots f_{Nx-2}, f_{Nx-1}, 0\}^T;$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & a_i & b_i & c_i & d_i & e_i & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & a_{Nx-2} & b_{Nx-2} & c_{Nx-2} & d_{Nx-2} & e_{Nx-2} \\ & & & & & a_{Nx-1} & b_{Nx-1} & c_{Nx-1} & d_{Nx-1} \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а компоненты матрицы $A$ и правой части $F$, с учетом (17), определяются по формулам:

$$a_i = e_i = \frac{1}{h^4};\ b_i = \frac{p}{E_{i-1}h^2} - \frac{4}{h^4};\ c_i = \frac{6}{h^4} - \frac{2p}{E_i h^2};\ d_i = \frac{p}{E_{i+1}h^2} - \frac{4}{h^4};$$

$$c_1 = c_{Nx-1} = \frac{7}{h^4} - \frac{2p}{E_i h^2};\ f = -\frac{F}{I}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{v_0}{E_i}\right) + \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x^2},$$

где $\quad \xi_i = \frac{b}{I}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_i^* y dy.$

Интеграл вычисляем с помощью метода Симпсона:

$$\frac{b}{I}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_i^* y dy = \frac{4h_y}{h^3}\big[\varepsilon_0^* y_0 + 4\big(\varepsilon_1^* y_1 + \varepsilon_3^* y_3 + \dots + \varepsilon_{Ny-1}^* y_{Ny-1}\big) + 2\big(\varepsilon_2^* y_2 + \varepsilon_4^* y_4 + \dots + \varepsilon_{Ny-2}^* y_{Ny-2}\big) + \varepsilon_{Ny}^* y_{Ny}\big]. \qquad (19)$$

Решение уравнения (18) можно получить различными методами (Гаусса, Крамера и т.д.).

Определив на нулевом этапе все необходимые величины (температурное поле, значения физико-механических и релаксационных параметров полимера, деформации, напряжения), можно найти скорость деформации ползучести $\left(\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t}\right)_0$.

Предполагая, что шаг по времени $\Delta t$ может быть сколь угодно малым, можно осуществить линейную аппроксимацию по времени и вычислить деформации ползучести на следующем «временном слое» $t = \Delta t$:

$$t = t_1 = \Delta t; \quad \varepsilon^* = \left(\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t}\right)_0 \Delta t.$$

**Литература:**

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1975. – 984 с.
2. Андреев В.И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел: Монография – М.: Издательство АСВ, 2002. – 288 стр.