Применение адаптивного модифицированного попеременно–треугольного итерационного метода для численной реализации двумерной математической модели движения водной среды

А.Е.Чистяков, Н.А.Фоменко

Технологический институт «Южного федерального университета» г.Таганрог

Моделирование процессов происходящих в водной среде имеет значение не только при исследованиях водных экосистем, экологического состояния водоемов, параметров водной среды, но и при проектировании и возведении прибрежных сооружений, так как воздействия волн и прибоя к берегам различных водоемов приводит к их разрушению. А так же непрерывное движение водной среды приводит к необратимым последствиям, таким как изменение рельефа дна. Последствия данных явления можно наблюдать на побережьях океанов, морей и крупных озер. Строительство берегозащитных сооружений, ограждающих дамб, волнорезов, волновых молов является дорогостоящим и технически сложным мероприятием. Поэтому моделирование данных процессов является важным не только для экологии, но и для экономики.

Для прогнозирования процессов заиленья, негативных факторов, влияющих на эксплуатацию прибрежной зоны и береговых сооружений необходимо детально исследовать гидродинамические процессы, происходящие в водной среде.

Для построения двумерной математической модели движения водной среды нам понадобится двумерная модель гидродинамики[1,2] исходными уравнениями которой являются:

– двумерный аналог системы уравнений Навье-Стокса

$$\begin{gathered}\left((H+\xi)u\right)'_t+(H+\xi)uu'_x+(H+\xi)vu'_y=\\=-g(H+\xi)\xi'_x+\left((H+\xi)\mu u'_x\right)'_x+\left((H+\xi)\mu u'_y\right)'_y+\frac{\tau_{x,p}}{\rho}-\frac{\tau_{x,b}}{\rho_v},\\\left((H+\xi)v\right)'_t+(H+\xi)uv'_x+(H+\xi)vv'_y=\\=-g(H+\xi)\xi'_y+\left((H+\xi)\mu v'_x\right)'_x+\left((H+\xi)\mu v'_y\right)'_y+\frac{\tau_{y,p}}{\rho}-\frac{\tau_{y,b}}{\rho_v},\end{gathered}\tag{1}$$

- аналог уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\xi'_t+\left((H+\xi)u\right)'_x+\left((H+\xi)v\right)'_y=0.\tag{2}$$

где ξ – функция подъема уровня, $V=\{u,v\}$ – вектор скорости движения водной среды, P – давление, μ – коэффициент турбулентного обмена по горизонтальному направлению, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность жидкости, $\vec{\tau}_b=\{\tau_{x,b},\tau_{y,b}\}$, $\vec{\tau}_p=\{\tau_{x,p},\tau_{y,p}\}$ – тангенциальное напряжение на дне и поверхности жидкости соответственно, H – глубина водоема, отсчитываемая от невозмущенной водной поверхности.

Математическая модель (1)-(2) учитывает геометрию донной поверхности и функцию возвышения уровня. Данная система уравнений рассматривается при следующих граничных условиях:

$$u'_n=0,\ v'_n=0,\quad \xi'_n=0.\tag{3}$$

Условие (3) описывает свободный выход на боковых границах.

Построение двумерной модели гидродинамики.

Расчетная область вписана в прямоугольник. Покроем область равномерной прямоугольной расчетной сеткой $\omega=\omega_t\times\omega_x\times\omega_y$:

$$\omega_t=\{t^n=nh_t,0\le n\le N_t-1,l_t=h_t(N_t-1)\},$$

$$\omega_x = \{x_i = ih_x, 0 \le i \le N_x - 1, l_x = h_x\left(N_x - 1\right)\},$$
$$\omega_y = \{y_j = jh_y, 0 \le j \le N_y - 1, l_y = h_y\left(N_y - 1\right)\},$$

где n, i, j – индексы по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно, h_t, h_x, h_y – шаги по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно, N_t, N_x, N_y – количество узлов по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно, l_t, l_x, l_y – длина расчетной области по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно.

Дискретный аналог модели движения водной среды, представленной уравнениями (1)-(2), согласно методу поправки к давлению[3] запишется в виде следующей системы уравнений, в которой первое уравнение записывается без учета функции возвышения на первом временном слое:

$$\begin{aligned}
&\left(H+\xi\right)\frac{u^{n+\sigma}-u^n}{h_t}+\left(H+\xi\right)uu'_x+\left(H+\xi\right)vu'_y=\\
&=\left(\left(H+\xi\right)\mu u'_x\right)'_x+\left(\left(H+\xi\right)\mu u'_y\right)'_y+\frac{\tau_{x,p}}{\rho}-\frac{\tau_{x,b}}{\rho_v},\\
&\left(H+\xi\right)\frac{v^{n+\sigma}-v^n}{h_t}+\left(H+\xi\right)uv'_x+\left(H+\xi\right)vv'_y=\\
&=\left(\left(H+\xi\right)\mu v'_x\right)'_x+\left(\left(H+\xi\right)\mu v'_y\right)'_y+\frac{\tau_{y,p}}{\rho}-\frac{\tau_{y,b}}{\rho_v}.
\end{aligned}\tag{4}$$

С учетом выполнения (2),(3) аналога уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости, данное уравнение можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
&\xi'_t-h_t\left(\left(H+\xi\right)\xi'_x\right)'_x-h_t\left(\left(H+\xi\right)\xi'_y\right)'_y=\\
&=-g\left(\left(H+\xi\right)u^{n+\sigma}\right)'_x-g\left(\left(H+\xi\right)v^{n+\sigma}\right)'_y,
\end{aligned}\tag{5}$$

а затем на следующем временном слое:

$$\begin{aligned}
&\left(H+\xi\right)\frac{u^{n+1}-u^{n+\sigma}}{h_t}=-g\left(H+\xi\right)\xi'_x,\\
&\left(H+\xi\right)\frac{v^{n+1}-v^{n+\sigma}}{h_t}=-g\left(H+\xi\right)\xi'_y.
\end{aligned}\tag{6}$$

Для построения конечно-разностных схем использован метод баланса.

Дискретные аналоги операторов конвективного uc'_x и диффузионного $\left(\mu c'_x\right)'_x$ переноса в случае частичной заполненности ячеек в случае граничных условий третьего рода:

$$c'_n(x,y,z,t)=\alpha_n c+\beta_n,$$

могут быть записаны в следующем виде [4]:

$$uc'_x \simeq \left(q_1\right)_{i,j}u_{i+1/2,j}\frac{c_{i+1,j}-c_{i,j}}{2h_x}+\left(q_2\right)_{i,j}u_{i-1/2,j}\frac{c_{i,j}-c_{i-1,j}}{2h_x},$$

$$\begin{aligned}
&\left(\mu c'_x\right)'_x \simeq \left(q_1\right)_{i,j}\mu_{i+1/2,j}\frac{c_{i+1,j}-c_{i,j}}{h_x^2}-\left(q_2\right)_{i,j}\mu_{i-1/2,j}\frac{c_{i,j}-c_{i-1,j}}{h_x^2}-\\
&-\left|\left(q_1\right)_{i,j}-\left(q_2\right)_{i,j}\right|\mu_{i,j}\frac{\alpha_x c_{i,j}+\beta_x}{h_x},
\end{aligned}$$

где q_m, $m=\overline{0..4}$ - коэффициенты, описывающие заполненность контрольных областей.

Полученные сеточные уравнения решались модифицированным попеременно-треугольным итерационным методом, алгоритм которого представлен ниже.

Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный метод вариационного типа. Рассмотрим задачу об отыскании решения операторного уравнения в конечномерном гильбертовом пространстве *H*:

$$Ax=f,\quad A:H\to H, \tag{10}$$

где *A* – линейный, положительно определенный оператор ($A>0$).Для нахождения задачи (14) будем использовать неявный итерационный процесс

$$B\frac{x^{m+1}-x^m}{\tau}+Ax^m=f,\quad B:H\to H, \tag{11}$$

где *m* – номер итерации, $\tau>$ 0 –итерационный параметр, а *B* – некоторый обратимый оператор. Обращение оператора *B* в (11) должно быть существенно проще, чем непосредственное обращение исходного оператора *A*в (10). При построении *B* будем исходить из аддитивного представления оператора A_0 - симметричной части оператора А

$$A_0=R_1+R_2,\quad R_1=R_2^{*}. \tag{12}$$

Также здесь и далее будем использовать кососимметричную часть оператора А

$$A_1=\frac{A-A^*}{2}.$$

В силу (12) $(Ay,y)=(A_0y,y)=2(R_1y,y)=2(R_2y,y)$. Поэтому в (12) $R_1>0,R_2>0$. Пусть в (11)

$$B=(D+\omega R_1)D^{-1}(D+\omega R_2),\ D=D^*>0,\ \omega>0,y\in H, \tag{13}$$

где D – некоторый оператор.

Поскольку $A_0=A_0^*>0$, то вместе с (12) это дает $B=B^*>0$. Соотношения (11)-(13) задают модифицированный попеременно-треугольный метод (МПТМ) решения задачи[5-7], если определены операторы R_1,R_2 и указаны способы определения параметров τ, ω и оператора D.

Алгоритм модифицированного попеременно – треугольного итерационного метода минимальных поправок для расчета сеточных уравнений имеет вид

$$r^m=Ax^m-f,\quad B(\omega_m)w^m=r^m,\ \tilde{\omega}_m=\sqrt{\frac{\left(Dw^m,w^m\right)}{\left(D^{-1}R_2w^m,R_2w^m\right)}},$$

$$s_m^{\ 2}=1-\frac{\left(A_0w^m,w^m\right)^2}{\left(B^{-1}A_0w^m,A_0w^m\right)\left(Bw^m,w^m\right)},\quad k_m=\frac{\left(B^{-1}A_1w^m,A_1w^m\right)}{\left(B^{-1}A_0w^m,A_0w^m\right)}, \tag{14}$$

$$\theta_m=\frac{1-\sqrt{\dfrac{s_m^{\ 2}k_m}{\left(1+k_m\right)}}}{1+k_m\left(1-s_m^{\ 2}\right)},\ \tau_{m+1}=\theta_m\frac{\left(A_0w^m,w^m\right)}{\left(B^{-1}A_0w^m,A_0w^m\right)},\ x^{m+1}=x^m-\tau_{m+1}w^m,\ \omega_{m+1}=\tilde{\omega}_m.$$

В адаптивном попеременно - треугольном методе в качестве параметра ω используется значение с предыдущей итерации с этим и связан локальный рост нормы вектора невязки.

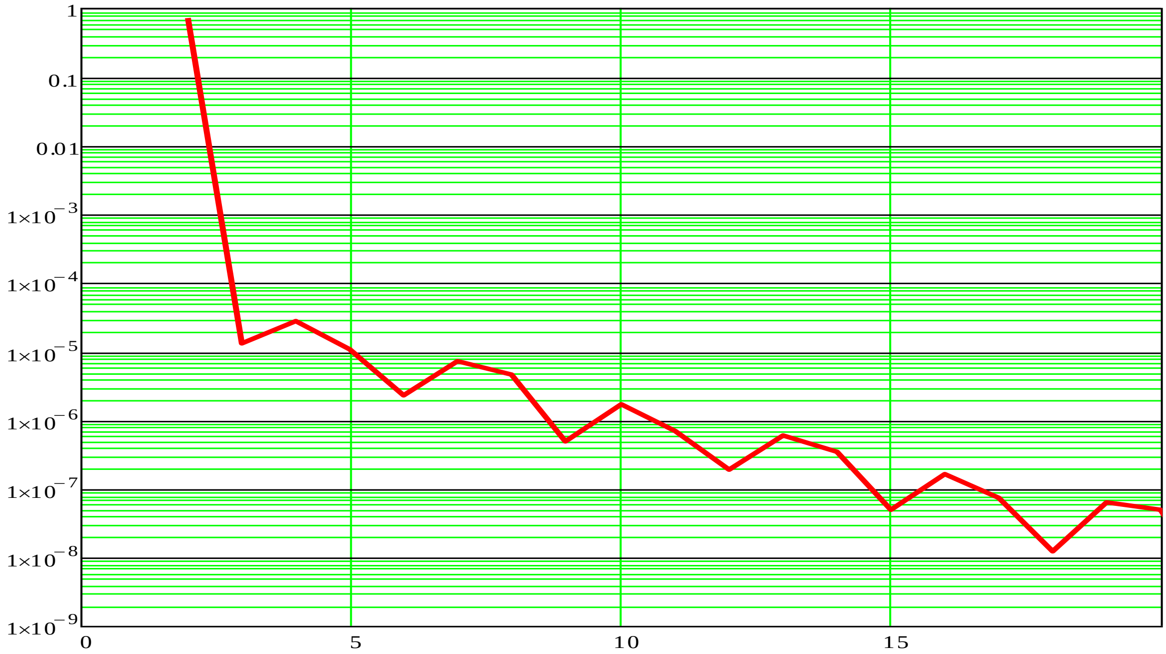

Рис.1.Зависимость нормы вектора невязки от количества итераций.

Из рис. 1 видно что, при решении сеточного уравнения адаптивным попеременно-треугольным методом равномерная норма вектора невязки (максимальный по модулю элемент) убывает достаточно быстро, но возможен локальный рост погрешности. В таблице 1 приведены результаты сравнения ПТМ и МВР.

Таблица 1.

Номер временного шага	Количество итераций Попеременно-треугольный метод		Количество итераций Метод верхней релаксации	
	Расчет поля скорости	Расчет давления	Расчет поля скорости	Расчет давления
1	1	1	1	1
2	1	4	1	53
3	3	4	17	56
4	3	4	23	58
5	3	4	27	59
6	3	4	30	60
7	3	4	32	60
8	3	4	35	61
9	3	4	36	61
10	3	4	38	62
11	3	4	39	62
12	4	4	40	62
13	4	4	41	62

Из приведенной таблицы видно, что выбор адаптивного модифицированного попеременно-треугольного метода вариационного типа является более предпочтительным по сравнению с методом верхней релаксации при решении сеточных уравнений, полученных в результате аппроксимации задач волновой гидродинамики.

Литература

1.Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководных водоемов. Известия ЮФУ. Технические науки. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011, №8(121). С. 159-167.

2.Фоменко Н.А. Моделирование гидродинамических процессов при обтекании корпуса судна. Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск «Актуальные проблемы математического моделирования». – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011, №8(121). С.139-147.

3.Чистяков А.Е., Фоменко Н.А. Построение двумерной математической модели движения водной среды // Журнал ТТИ ЮФУ. Информатика, вычислительная техника и инженерное образование №5(7)-2011, Электронный журнал. С. 59-66.

4.Чистяков, А. Е. Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды// Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск «Актуальные проблемы математического моделирования». – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010, №6(107). С. 66-77.

5.Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором. Математическое моделирование, 2012, том. 24, №1. С.3-20.

6.Сухинов А.И. Модифицированный попеременно – треугольный метод для задач тепловодности и фильтрации// Вычислительные системы и алгоритмы. – Ростов – на– Дону: Изд-во РГУ,1984, С. 52-59.

7.Чистяков А.Е. Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска. Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск «Актуальные проблемы математического моделирования». – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010, №6(107). С. 237-249.